<u>מתמטיקה בדידה – תרגיל 11- פתרונות</u>

1. הוכיחו כי:

א. $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$

ב. $\left|\mathbb{N}^{2012}\times\mathbb{R}\right| = \left|\mathbb{R}^{2012}\right|$

ג. $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| > \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|$

ד. $\left|\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right| = \left|[0,1]^{\mathbb{R}}\right|$

ה. $|P(\mathbb{R})| = |P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})|$

ו. $|P(\mathbb{R})| = |P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})|$

<u>פתרון</u>:

א. $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = \left|\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$

ב. $\left|\mathbb{N}^{2012}\times\mathbb{R}\right| = \left|\mathbb{N}^{2012}\right|\cdot|\mathbb{R}| = \aleph_0\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{2012} = \left|\mathbb{R}^{2012}\right|$

ג. לפי מפשט קנטור: $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = \left|\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{2^{\mathbb{N}}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}\times 2^{\mathbb{N}}}\right| = \left|2^{2^{\mathbb{N}}}\right| > \left|2^{\mathbb{N}}\right| = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|$

ד. $\left|\{0,1\}^{\mathbb{R}}\right| = 2^{|\mathbb{R}|} = 2^{2^{|\mathbb{N}|}} \underset{previous\ part}{=} \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = \left|[0,1]^{\mathbb{R}}\right|$

ה. נוכיח קודם ש- $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| = 2^{\aleph_0}$. ברור כי $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| \le 2^{\aleph_0}$ ולכן אם $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| < 2^{\aleph_0}$ אז $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| \le \aleph_0$. אם כך, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| + |\mathbb{Q}| \le \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. קיבלנו סתירה ולכן $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| = 2^{\aleph_0}$.

נוכיח טענת עזר: אם X, Y קבוצות כך ש- $|X| \le |Y|$ אזי $|P(X)| \le |P(Y)|$.

<u>הוכחה</u>: מהנתון קיימת פונקציה $f: X\to Y$ חח"ע. נגדיר $F: P(X)\to P(Y)$ באופן הבא: $F(A) = f[A]$. פונקציה זאת חח"ע. מש"ל.

מכאן מקבלים מיידית כי $|P(\mathbb{R})| = |P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})|$

ו. $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| = 2^{\aleph_0}$. נשים לב שכל $X\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ שאינה ריקה כוללת מספרים אי-רציונאליים ולכן $X\subset\mathbb{R}$ וגם $X\not\subset\mathbb{Q}$. מבאן: $P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \subset \left(P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})\right)\cup\{\varnothing\}$

ומכאן לפי הסעיף הקודם:

$|P(\mathbb{R})| = |P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})| \le \left|\left(P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})\right)\cup\{\varnothing\}\right| = |P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})| \le |P(\mathbb{R})|$. ועתה לפי $C-B$ נקבל $|P(\mathbb{R})| = |P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Q})|$.

2. הוכיחו שקיימות $B,C\subseteq A$ כך ש $B\cup C = A$, $B\cap C = \phi$ ו- $|B| = |C| = |A|$.

<u>פתרון</u>:

לכל עוצמה אינסופית a, מתקיים $a+a=a$ ולכן קיימות A_1, A_2 זרות כך ש- $|A_1| = |A_2| = a$ ו- $|A_1\cup A_2| = a$. לכן קיימת $f: A_1\cup A_2\to A$ הפיכה. נסמן $B = f[A_1]$ ו- $C = f[A_2]$. מאחר ו- f הפיכה מתקיים $B\cup C = A$ (כי f על), $B\cap C = \phi$ (כי f חח"ע ו- A_1, A_2 זרות) ו- $|B| = |C| = a$ (כי f חח"ע ועל).

3. תהיו A ו- B קבוצות, B קבוצה אינסופית. נסמן $|A|=a$, $|B|=b$ ונניח ש $1<a\le b$. הוכיחו שעוצמת הקבוצה $\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})$ היא b.

<u>פתרון</u>: $b=|B|\le|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|$ ע"י בחירת $x_0\in A$ (קיים כזה) והגדרת פונק' חח"ע $f:B\to\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})$ ע"י $f(b)=(b,x_0)$. מצד שני: $|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|\le|A|\cdot|B|=a\cdot b=b$ (השתמשנו בעובדה $|B\times\{x\}|=|B|\cdot 1=|B|$ ושלכל עוצמה אינסופית b, $a\cdot b=\max\{a,b\}$). לכן לפי קנטור-ברנשטיין $|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|=b$.

פתרון זריז יותר: $\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})=B\times A$ (למה?) ולכן $|\bigcup_{x\in A}(B\times\{x\})|=|A|\cdot|B|=a\cdot b=b$.

4. תהי F קבוצת כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$, ותהי G קבוצת כל הפונקציות מ- F ל- F.

א. מהי העוצמה של G?

ב. האם העוצמה של G שווה לעוצמת אחת מן הקבוצות הבאות: $P(P(P(\mathbb{Q})))$, $P(P(P(P(\mathbb{Q}))))$? אם כן לאיזו?

ג. מהי עוצמת הקבוצה הבאה: $U=\{A\subseteq\mathbb{R}^3 \mid A$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית$\}$?

<u>פתרון</u>:

א. $F=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $G=F^F$. לכן לפי הגדרת החזקה של עומצות, $|G|=|F^F|=|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|^{|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|}=\left(\aleph^{\aleph}\right)^{\left(\aleph^{\aleph}\right)}=\aleph^{\left(\aleph\cdot\aleph^{\aleph}\right)}=\aleph^{\left(\aleph^{\aleph}\right)}=\aleph^{2^{\aleph}}=2^{2^{\aleph}}$. השתמשנו בעובדות הבאות: $\left(a^b\right)^c=a^{b\cdot c}$, $2^a=a^a$ עבור עוצמות אינסופיות (נובע מ- $a\cdot a=a$ ו- $a<2^a$), וגם אם $a\le b$ אז $a\cdot b=b$ עבור b עוצמה אינסופית.

ב. G שקול לעוצמה $P(P(P(\mathbb{Q})))$ -

$|\mathbb{Q}|=\aleph_0,\quad |P(\mathbb{Q})|=2^{\aleph_0}=\aleph,\quad |P(P(\mathbb{Q}))|=2^{\aleph},\quad |P(P(P(\mathbb{Q})))|=2^{2^{\aleph}}$

ג. ידוע מאלגברה שקבוצה בלתי תלויות ליניארית מכילה אחד, שתיים או שלושה וקטורים וכל אחד מהם מהצורה (x,y,z), כאשר $x,y,z\in\mathbb{R}$. נוכיח שיש לא יותר מ- $\aleph$ קבוצות בת"ל שמכילות 3 וקטורים. נסמן את קבוצת קבוצות כאלה ב- S. נבנה פונקציה: $f:S\to\mathbb{R}^9$ באופן הבא: $\{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\}\xrightarrow{f}(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3)$. זאת פונקציה חח"ע ולכן עוצמה של S לכל היותר: $\aleph=|\underbrace{\aleph\times\aleph\times\cdots\times\aleph}_{\text{9 times}}|=|\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{\text{9 times}}|$.

באותו האופן מוכיחים שיש לכל היותר $\aleph$ קבוצות בת"ל בעלות שני וקטורים ווקטור אחד. ולכן בסה"כ יש $\aleph=\aleph+\aleph+\aleph$ קבוצות בת"ל, כלומר $|U|\le\aleph$.

מצד שני, כל קבוצה $A_\alpha=\{(\alpha,0,0)\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ היא קבוצה בלתי תלויה. כלומר מצאנו $\aleph$ איברים שונים של U ולכן $\aleph\le|U|$. ולכן לפי משפט קנטור-ברנשטיין $|U|=\aleph$.

5. מצא קבוצה סדורה חלקית שיש בה איבר מינימאלי יחיד ואין בה איבר קטן ביותר.

<u>פתרון</u>:

נסתכל בקבוצה $\mathbb{Z}\cup\left\{\sqrt{3}\right\}$. נגדיר את הסדר החלקי כדלקמן – בין כל שני איבר של $\mathbb{Z}$ מדובר בסדר הרגיל $\le$ ו- $\sqrt{3}$ אינו ניתן להשוואת עם שום איבר של $\mathbb{Z}$. קל לראות שהקבוצה שהתקבלה היא קבוצה סדורה חלקית. $\sqrt{3}$ הוא איבר מינימאלי יחיד ואין איבר קטן ביותר.

6. תהי A קבוצת הקבוצות האינסופיות של מספרים טבעיים כך שגם המשלימים שלהם ביחס ל- $\mathbb{N}$ אינסופיים (למשל מספרים זוגיים ואי-זוגיים). הוכיחו שבקבוצה סדורה חלקית $(A,\subset)$ אין הן איבר מינימאלי הן איבר מקסימאלי.

__פתרון__:

יהי $X\in A$. X הוא קבוצה אינסופית, כך גם המשלים שלה ביחס ל- $\mathbb{N}$. ניקח $t\in\overline{X}$ ונתבונן בקבוצה $Y=X\cup\{t\}$ קבוצה אינסופית ובעלת משלים אינסופי. כמו כן $X\subset Y$.

נגדיר $Z=X\setminus\{t\}$. גם קבוצה זאת אינסופית בעלת משלים אינסופי, כמו כן $Z\subset X$.

לכן X אינה קבוצה מינימאלית ואינה קבוצה מקסימאלית. זה נכון לכל $X\in A$ ולכן אין ל- A הן איבר מינימאלי הן איבר מקסימאלי.

7. תהי B שרשרת ב- $(A,\prec)$. הוכיחו ש- B שרשרת מקסימאלית אמ"ם אין איבר ב- $A\setminus B$ שניתן להשוואה עם כל איברי B.

__פתרון__:

נוכיח את הטענה ההופכית: B אינה שרשרת מקסימאלית אמ"ם קיים איבר ב- $A\setminus B$ שניתן להשוואה עם כל איברי B.

- אם B שרשרת ו- $a\in A\setminus B$ כך ש- a ניתן להשוואה עם כל איברי B אז ב- $B\cup\{a\}$ כל שני איברים ניתנים להשוואה. לכן $B\cup\{a\}$ הינה שרשרת ו- $B\subset B\cup\{a\}$. לכן B אינה מקסימאלית.
- אם B אינה מקסימאלית, תהי D שרשרת כך ש- $B\subset D$. יהי $a\in D\setminus B$ אז מכיוון ש- D שרשרת, a ניתן להשוואה עם כל האיברים של B וגם $a\in A\setminus B$.

8. הוכיחו כי $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ עם הסדר המילוני (יחס זה הוגדר בתרגיל בית 6, תרגיל 5) היא קבוצה סדורה היטב (קבוצה סדורה ליניארית שבכל תת-קבוצה לא ריקה שלה יש איבר קטן ביותר).

__פתרון__:

$(\mathbb{N},\le)$ קס"ל, לכן $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\le_l)$ קס"ל (לפי הגדרת היחס המילוני).

ניקח $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. נוכיח כי ב- A יש איבר קטן ביותר ביחס לסדר מילוני.

$(x_0,y_0)\in A$ נקרא איבר קטן ביותר אם לכל $(x,y)\in A$ מתקיים $(x_0,y_0)\le_l(x,y)$. לפי הגדרת סדר מילוני כדי ש- $(x_0,y_0)\le_l(x,y)$ או ש- $x_0\le x$ או ש- ($x_0=x$ וגם $y_0\le y$) ביחס לסדר רגיל. כיוון ש- $x_0,y_0,x,y\in\mathbb{N}$ אז ביחס לסדר רגיל זה תמיד מתקיים כי $(\mathbb{N},\le)$ קס"ה.

לכן גם $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\le_l)$ קס"ה.

9. תהי $(X,\le)$ קס"ח כך שלכל קבוצה חלקית לא ריקה עם חסם מלעיל יש גם חסם עליון. הוכיחו כי לכל קבוצה חלקית לא ריקה עם חסם מלרע יש גם חסם תחתון.

__פתרון__:

תהי $\varnothing\neq A\subseteq X$ קבוצה חלקית של X עם חסם מלרע. נגדיר קבוצה $B=\{x\in X\mid x\le a,\forall a\in A\}$ - קבוצת חסמי מלרע של A. $B\neq\varnothing$ כי ל- A יש חסם מלרע.לפי הגדרה של B וגם לפי הנתון ל- B יש חסם עליון - x_0.

x_0 - חסם עליון של B, לכן הוא איבר קטן ביותר (איבר ראשון) בקבוצת כל החסמים מלעיל של B.

בנוסף, כיוון שכל $a\in A$ הוא חסם מלעיל ל- B (לפי ההגדרה של B) מתקיים $x_0\le a$, $\forall a\in A$. לכן x_0 חסם מלרע של A. מכאן - $x_0\in B$ ולכן x_0 הוא איבר אחרון (הגדול ביותר) של קבוצת החסמים מלרע של A, כלומר x_0 הוא חסם תחתון של A.

10. נתונה הקבוצה $A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(2,1),(2,6),(3,1),(3,2),(3,6)\}$. נגדיר יחס $\le_*$ ע"י: $(x,y)\le_*(z,w)\Leftrightarrow x\,|\,z\wedge y\le w$.

א. הראו $(A,\le_*)$ קס"ח.

ב. מצאו איברים מינימאליים, מקסימאליים, קטן ביותר, גדול ביותר (אם קיימים).

ג. תהי $A\supset B=\{(1,2),(1,3),(1,6),(3,2)\}$ יחד עם היחס $\le_*$. קבעו $\sup(B),\ \inf(B)$.

__פתרון__:

א. יש להראות רפלקסיביות, אנטי-סימטריות וטרנזיטיביות של היחס. מיידי לפי הגדרה של היחס.

ב. __איבר מקסימאלי__: $(3,6),(2,6)$; __איבר הגדול ביותר__: לא קיים, __איבר מינימאלי__: $(1,1)$, __איבר הקטן ביותר__: $(1,1)$.

ג. $\sup(B)=(3,6),\quad \inf(B)=(1,2)$.

__**בהצלחה!**__