

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 1: דינמיקה

1. גוף בעל מסה m נע בהשפעת כח הכובד ובהשפעת התנגדות האויר. התנגדות האויר פרופורציונית למהירות הגוף ונתונה ע"י $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$, כאשר γ קבוע חיובי.

(א) מהם המימדים של γ ?

γ נמדד ב Kg/s או $N \cdot s/m$

(ב) רשמו את משוואות התנועה בכוונים x ו y .

משוואות התנועה (עבור המהירות) בכוונים \hat{x} ו \hat{y} , בהתאמה, הן:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -\gamma v_x, \\ m\dot{v}_y &= -\gamma v_y - mg. \end{aligned}$$

(ג) רשמו פתרון כללי למשוואות התנועה בכוון y .

$$v_y = Ae^{-\beta t} - gm/\gamma$$

(ד) מהו פתרון משוואות התנועה בכוון x ?

$$v_x = Be^{-\beta t}$$

(ה) בטאו את מהירות הגוף לאחר זמן רב בעזרת m , γ ו g , אם ידוע כי ב $t = 0$ הגוף במנוחה

מתנאי ההתחלה $\vec{v}(0) = 0$ נקבל את הקבועים $A = gm/\gamma$, $B = 0$ ולכן

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= 0, \\ \dot{v}_y &= (gm/\gamma)(e^{-\beta t} - 1). \end{aligned}$$

לכן

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_y = -gm/\gamma$$

2. חלקיק טעון בעל מסה m ומטען חשמלי q נע בהשפעת שדה חשמלי $\mathbf{E} = E_0 \hat{y}$ ושדה מגנטי $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. הכוחות החשמלי והמגנטי נתונים ע"י $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ ו $\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ בהתאמה. (הערה: הניחו כי מסת החלקיק זניחה).

(א) רשמו את משוואות התנועה של החלקיק עבור המהירות. משוואות התנועה בכוונים $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ בהתאמה

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= qv_y B_0, \\ m\dot{v}_y &= -qv_x B_0 + qE_0, \\ m\dot{v}_z &= 0. \end{aligned}$$

(ב) מהו פתרון משוואות התנועה בכל כוון ?

$$\begin{aligned} v_x &= A \cos(\omega t + \varphi) + qE_0/m\omega, \\ v_y &= -A \sin(\omega t + \varphi), \\ v_z &= B_0. \end{aligned}$$

כאשר A, B, φ קבועים הנקבעים מתנאי התחלה ו $\omega = qB_0/m$ התדירות הזויתית.

(ג) נתון שב $t = 0$ מהירות החלקיק נתונה ע"י $(v_x, v_y, v_z) = (v_0, 0, 0)$. בטאו את פתרון משוואות התנועה ע"י v_0 והגדלים הנתונים בשאלה. נבחר $\varphi = 0$ ונקבל

$$\begin{aligned} v_x &= (v_0 - qE_0/m\omega) \cos \omega t + qE_0/m\omega, \\ v_y &= -(v_0 - qE_0/m\omega) \sin \omega t, \\ v_z &= 0. \end{aligned}$$

(ד) נתון שב $t = 0$ החלקיק נמצא בראשית הצירים. מהו וקטור המקום של החלקיק כפונקציה של הזמן ?

$$\begin{aligned} x &= (v_0/\omega - qE_0/m\omega^2) \sin \omega t + (qE_0/m\omega)t, \\ y &= -(v_0/\omega - qE_0/m\omega^2)(\cos \omega t - 1), \\ z &= 0. \end{aligned}$$

(ה) תארו באופן איכותי את צורת המסלול שמבצע החלקיק.

המסלול הינו ציקלואידה במישור $x - y$.

(ו) מהו המסלול שהיה מבצע החלקיק אם מהירותו ההתחלתית היתה בכיוון z בלבד?

במקרה כזה המסלול היה מתואר ע"י

$$x = -(qE_0/m\omega^2)(\sin \omega t - \omega t),$$

$$y = (qE_0/m\omega^2)(\cos \omega t - 1),$$

$$z = v_0 t.$$

המסלול הינו ציקלואידה שצירה $v_0 t$.