תרגיל בית 10 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. מצאו בעזרת משפט קיילי שיכון $\varphi\colon U_8 \to S_4$ וכתבו אותו באופן מפורש.

שאלה 2. הוכיחו את האיזומורפיזמים הבאים באמצעות משפט האיזומורפיזמים הראשון (או בכל דרך אחרת):

א. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \Omega_\infty$.

ב. $\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,1)\rangle$.

ג. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(2,2)\rangle$.

שאלה 3. מצאו את כל התמונות האפימורפיות של D_7.

שאלה 4. נתבונן בתת־החבורה $K_4 = \{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \leq S_4$, הנקראת גם חבורת הארבעה של קליין. ודאו כי אתם מבינים מדוע $K_4 \lhd S_4$. בשאלה זו נוכיח כי $S_4/K_4 \cong S_3$ בשלוש דרכים שונות.

א. <u>הוכחה ישירה:</u> הראו שבכל מחלקה (שמאלית) של K_4 ב-S_4 יש נציג יחיד σ כך ש-$\sigma(4) = 4$, והגדירו באמצעות הנציגים האלו את האיזומורפיזם הדרוש.

ב. <u>על ידי פעולות:</u> החבורה S_4 פועלת על מחלקת הצמידות של $(1\ 2)(3\ 4)$ על ידי הצמדה. הראו שהפעולה הזו מגדירה הומומורפיזם $S_4 \to S_3$, שהגרעין שלו הוא K_4.

ג. <u>על ידי תכונות של S_4/K_4:</u> הוכיחו כי S_4/K_4 היא חבורה לא אבלית מסדר 6. כיוון ש-S_3 היא החבורה היחידה מסדר 6 שאינה אבלית (עד כדי איזומורפיזם), הסיקו כי $S_4/K_4 \cong S_3$.

שאלה 5. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$. ראיתם במשפט האיזומורפיזמים הרביעי (משפט ההתאמה) את הקשר בין תת־חבורות של ${}^{G}\!/\!_{H}$ לבין תת־חבורות של G המכילות את H.

א. הוכיחו שאם $K_1, K_2 \in G$ תת־חבורות המכילות את H, אז

$$(K_1/H) \cap (K_2/H) = (K_1 \cap K_2)/H$$

ב. מכך שאנו יודעים שתת־החבורה הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-K_1 וב-K_2 היא $K_1 \cap K_2$, נסחו והוכיחו טענה דומה עבור $(K_1 \cap K_2)/H$.

שאלה 6. תהי G חבורה מסדר n, ויהי $\varphi\colon G \to S_n$ שיכון קיילי. הוכיחו ש-$g \in G$ הוא מסדר m אם ורק אם $\varphi(g)$ הוא מכפלה של $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים.

שאלה 7. בבנייה של שיכון קיילי בחרנו שמות לאיברים של G, והתאמנו לכל $g \in G$ לתמורה שהוא מגדיר ביחס לשמות שבחרנו. הראו שאם היינו בוחרים את השמות באופן שונה, שני השיכונים שמתקבלים היו צמודים זה לזה.

במפורש: נכתוב $G = \{g_1, \dots, g_n\} = \{g'_1, \dots, g'_n\}$. יהי $\varphi\colon G \hookrightarrow S_n$ שיכון קיילי ביחס לבחירת השמות $\{g_1, \dots, g_n\}$, ויהי $\psi\colon G \hookrightarrow S_n$ שיכון קיילי ביחס לבחירת השמות $\{g'_1, \dots, g'_n\}$. הוכיחו כי תת־החבורות $\varphi(G)$ ו-$\psi(G)$ של S_n צמודות. בפירוט: הראו שקיימת $\sigma \in S_n$ שעבורה לכל $\tau \in S_n$ מתקיים $\psi(\tau) = \sigma \circ \varphi(\tau) \circ \sigma^{-1}$.

(הדרכה: קיימת $\sigma \in S_n$ כך ש-$g'_i = g_{\sigma(i)}$ לכל $1 \leq i \leq n$).

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. יהיו G_1, G_2 חבורות, תהי $N \lhd G_1$ תת־חבורה נורמלית, ויהי $f\colon G_1 \to G_2$ הומומורפיזם. נסמן על ידי $\rho\colon G_1 \to G_1/N$ את ההטלה הטבעית $\rho(g) = gN$. הוכיחו כי קיים הומומורפיזם $\hat{f}\colon G_1/N \to G_2$ כך ש-$f = \hat{f} \circ \rho$ אם ורק אם $\ker f \subseteq N$.

בהצלחה!