אינפי 3 - הרצאה 2

תמלול:ניר שורץ

16 באוקטובר 2013

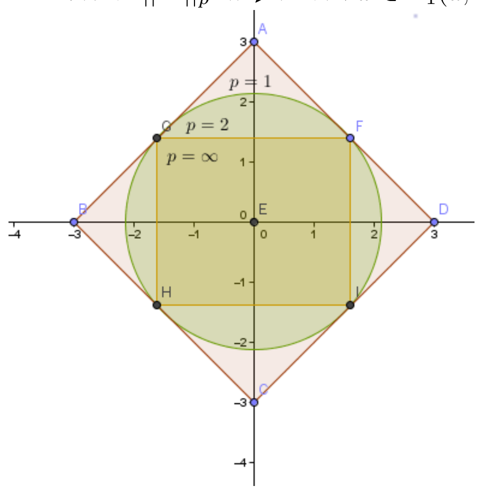
חזרה: הגדרנו נורמות $p \ge 1 \quad ||\ \ ||_p,$ ב-$\mathbb{R}^n$.

0.1 כדורים:

בהנתן $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$ נגדיר:
$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| < r\}$ כדור פתוח.
$\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| \le r\}$ כדור סגור.
$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| = r\}$ ספירה.

0.1.1 הגדרה:

בהנתן שתי נורמות $|||\ \ |||, ||\ \ ||$ אומרים ש$|||\ \ ||| \sim ||\ \ ||$ (שקולות) אם $\exists k, K > 0$ כך ש: $\forall x \in \mathbb{R}^n, k|||x||| \le ||x|| \le K|||x|||$. כלומר אם $||x-a|| < K\epsilon \Leftarrow |||x-a||| < \epsilon$ ואם $x \in B_1(a, K\epsilon) \Leftarrow x \in B_2(a,\epsilon)$. ראינו עבור $||\ \ ||_p$ כאשר:



0.1.2 דוגמה:

$||x||_2 = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} \le \sqrt{n}\max\limits_{1\le i\le n}|x_i| = \sqrt{n}||x||_\infty$ וכן $|x_i| \le \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$. ולהפך $||x||_2 = \sqrt{x_1^2+\ldots x_n^2} \ge \max\limits_{1\le i\le n}|x_i| = ||x||_\infty$. וסה"כ $||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{n}||x||_\infty$ דהיינו עבור $k=1, K=\sqrt{n}$ נוכל להסיק שאכן $||\ \ ||_\infty \sim ||\ \ ||_2$.

0.1.3 <u>משפט שנוכיח עוד כמה הרצאות:</u>

כל שתי נורמות $|||\ \ |||, ||\ \ ||$ ב$\mathbb{R}^n$ שקולות זו לזו ($|||\ \ ||| \sim ||\ \ ||$).

0.1.4 <u>הגדרה:</u>

הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא <u>חסומה</u> אם קיים $M \geq 0$ כך ש$\forall x \in A, ||x|| \leq M$. במילים אחרות $A \subset \bar{B}(0, M)$.

0.1.5 <u>הגדרה:</u>

תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$. $a \in U$ היא נקודה <u>פנימית</u> אם $\exists \epsilon > 0 \text{ s.t } B(a, \epsilon) \subseteq U$. אוסף הנקודות הפנימיות יסומן כ$\mathring{U} = \text{int U} = \{\text{set of interior points}\}$.

0.1.6 <u>הגדרה:</u>

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה <u>פתוחה</u> אם $\mathring{U} = U$. U פתוחה $\Leftrightarrow$ כל נקודה $a \in U$ היא נקודה פנימית.

0.1.7 <u>דוגמאות מאינפי1:</u>

1. עבור $n = 1, U = (a, b)$.

2. $U = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. אך $[0, 1]$ לא פתוחה כיוון ש0 איננה נקודה פנימית.

0.1.8 <u>הגדרה:</u>

<u>$B(a, \epsilon)$</u>- היא ϵ-סביבה של a. בנוסף, תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה כך ש$a \in U$ אזי U-סביבה של a.

0.1.9 <u>הגדרה:</u>

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא קבוצה סגורה אם $\mathbb{R}^n \setminus F$ היא קבוצה פתוחה.

0.1.10 <u>דוגמה:</u>

$\mathbb{R} \supseteq [0, 1]$ היא קבוצה סגורה.

0.1.11 תרגיל:

הוכח ש$B(a,r)$ - קבוצה פתוחה ו$\bar{B}(a,r)$ קבוצה סגורה.

0.1.12 הוכחה:

1. צ"ל ϵ כך ש$B(x_0,\epsilon) \subseteq B(a,r) = U$. נגדיר $\epsilon = r - ||x_0 - a|| > 0$. נבדוק את הדרישה. ניקח $x \in B(x_0,\epsilon) \Rightarrow ||x - x_0|| < \epsilon$. כעת $||x - a|| = ||(x - x_0) + (x_0 - a)|| \leq ||x - x_0|| + ||x_0 - a|| < \epsilon + ||x_0 - a|| = r$. כלומר $x \in B(a,r)$ ולכן $B(x_0,\epsilon) \subseteq B(a,r)$.

2. צ"ל $\bar{B}(a,r)$ סגור $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(a,r)$ פתוחה. $\mathbb{R}^n - \bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| > r\}$. יהא $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(a,r)$ אזי $0 < \epsilon < ||x_0 - a|| - r$. כדי לסיים את ההוכחה מספיק להוכיח בבית ש$B(x_0,\epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(a,r)$.

0.1.13 אי־שיוויון משולש:

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |\, ||x|| - ||y||\, | \leq ||x - y|| \leq ||x|| + ||y||}$$

0.1.14 הוכחה:

תחילה,

$$\begin{gathered} ||x|| = ||(x - y) + y|| \leq ||x - y|| + ||y|| \\ ||y|| = ||(y - x) + x|| \leq ||y - x|| + ||x|| \\ ||x|| - ||y|| \leq ||x - y|| \\ ||x|| + ||y|| \leq ||x - y|| \\ -||x - y|| \leq ||x|| - ||y|| \leq ||x - y|| \Rightarrow |\, ||x|| - ||y||\, | \leq ||x - y|| \end{gathered}$$

והוכחנו את האי"ש.

0.1.15 הגדרה:

תהא $F \subseteq \mathbb{R}^n$. $p \in \mathbb{R}^n$ תקרא <u>נקודת הצטברות</u> אם $B(p,\epsilon) \cap F \neq \emptyset \quad \forall \epsilon > 0$.

0.1.16 דוגמה:

בקטע $F = [0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ישנן נקודות הצטברות ב0 וב1.

0.1.17 הגדרה:

תהי $F \subseteq \mathbb{R}^n$. $\bar{F} = \{\text{set of limit points of } F\}$ ונקראת סגור של F. $F \subseteq \bar{F}$.

0.1.18 משפט:

F סגורה אמ"ם $F=\bar{F}$.

0.1.19 הוכחה:

נניח שF סגורה כלומר $\mathbb{R}^n\setminus F$ קבוצה פתוחה. ניקח נקודה $p\in\bar{F}$. ר"ל $p\in F$. בשלילה, $p\notin F$ אזי $p\in\mathbb{R}^n\setminus F;$ $\mathbb{R}^n\setminus F$ פתוחה ולכן $\exists\epsilon>0:B(p,\epsilon)\subseteq\mathbb{R}^n\setminus F$ ואזי $B(p,\epsilon)\cap F=\emptyset\Rightarrow p\notin\bar{F}$ וזו סתירה. באופן דומה גם בכיוון הפתוח ולכן $F=\bar{F}$.

0.1.20 הגדרה:

אם הקבוצה $F\subseteq\mathbb{R}^n$ היא:

1. F חסומה
2. F סגורה

אזי F נקראת קבוצה קומפקטית (compact).

0.1.21 דוגמאות:

1. $[1,\infty)\subset\mathbb{R}$ איננה קומפקטית. מחד, $\mathbb{R}\setminus[1,\infty)=(-\infty,1)$ - פתוחה אבל $[1,\infty)$ לא חסומה ועל כן לא קומפקטית .
2. $F=(0,1)$ לא קומפקטית.
3. $F=[1,2]\cup[3,4]$ קומפקט.

0.2 תזכורת לאלגברה ליניארית

$X_0\in\mathbb{R}^n$ תת מרחב ליניארי אם $\alpha x+\beta y\in X_0\quad\forall x,y\in X_0,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

0.2.1 בסיס:

$e_1,\dots,e_m\in X_0$ לא תלויה ליניארית וכן $X_0=\text{span}\{e_1,\dots,e_m\}=\{x=\alpha_1e_1+\dots\alpha_me_m:\alpha_j\in\mathbb{R}\}$ ונסמן $m=\dim X_0$. לדוגמה: $\dim X_0=1$ - קו ישר וכן $X_0=\{\lambda e:\lambda\in\mathbb{R}\}$ ו$e\neq 0$ וקטור כיוון.

0.2.2 מרחבים אפינים (מישורים - affine space):

$L=x_0+X_0,x_0\in\mathbb{R}^n$ אם $e_1,\dots,e_m$ בסיס בX_0 אזי $L=\{x=x_0+\alpha_1e_1+\dots+\alpha_me_m:\alpha_j\in\mathbb{R}\}$, $\dim L=1$ ובדוגמה שלנו $L=\{x_0+\lambda e:\lambda\in\mathbb{R}\}$.

0.2.3 השלמה אורתגונלית לבסיס

יהא $X_0\subset\mathbb{R}^n$ - תת מרחב ליניארי אזי $\mathbb{R}^n=X_0\oplus X_0^{\perp}$ ויתקיים $\forall x\in X_0,y\in X_0^{\perp},\langle x,y\rangle=0\quad(x\perp y)$. $\dim X_0=n-1$ ו$\dim X_0^{\perp}=1$ קו ישר.
ν בסיס ב-$X_0^{\perp}$
$X_0^{\perp}=\{\lambda\nu:\lambda\in\mathbb{R}\}$ ו$X_0=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\nu\rangle=0\}$ כאשר $\nu=(A_1,\dots,A_n)$ כך ש$X_0=\{x\in\mathbb{R}^n:A_1x_1+\dots+A_nx_n=0\}$ ($\dim X_0=n-1$).

באופן כללי: $\dim X_0 = m$ אזי $\dim X_0^{\perp} = n-m$ כאשר $\{\nu_1,\ldots,\nu_{n-m}\}$ בסיס ב $X_0^{\perp}$,
ז"א $X_0^{\perp} = \mathrm{span}\{\nu_1,\ldots,\nu_{n-m}\}$. $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_1\rangle = \cdots = \langle x, v_{n-m}\rangle = 0\}$
ו$\nu_j = (A_{1j}, A_{2j}, A_{3j}, \ldots A_{nj})$. ולבסוף $X_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} A_{ij}x_i = 0, j = 1,\ldots,n-m\right\}$.
תת מרחב ליניארי X_0, $\dim X_0 = m$ אזי ניתן לבנות מערכת משוואות:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + \cdots + A_{n1}x_n = 0 \\ \ldots \\ A_{1,n-m}x_1 + A_{2,n-m}x_2 + \ldots A_{n,n-m}x_n = 0 \end{cases}$$

או במילים אחרות לדרוש ש$\mathrm{rank}(A_{ij})_{i,j=1}^{n,n-m} = n-m$

0.2.4 מישור אפיני - אל (Hyperplane)

יוגדר כ $dimL = n-1$ וכזכור $\dim X_0 = n-1$, $L = a + X_0$. אזי $x \in L \Leftrightarrow x = a +$
$u, u \in X_0 \Leftrightarrow x - a = u \in X_0$. לכן $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x - \Leftarrow \nu \in X_0^{\perp}$ $\langle x-a, \nu\rangle = 0,$
$a \in X_0\}$ כאשר $\nu = (A_1,\ldots,A_n)$ ולבסוף נסיק $\boxed{A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) = 0}$
ועבור $a = (a_1,\ldots a_n)$, $C = A_1a_1 + \ldots A_na_n$ יתקיים $\boxed{A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = C}$.

<u>מקרה כללי</u> עבור $\dim L = m$

$$\boxed{\begin{cases} A_{11}(x_1 - a_1) + \cdots + A_{n1}(x_n - a_n) = 0 \\ A_{1,n-m}(x_1 - a_1) + \cdots + A_{n,n-m}(x_n - a_n) = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} A_{11}x_1 + \cdots + A_{n1}x_n = c_1 \\ A_{1,n-m}x_1 + \cdots + A_{n,n-m}x_n = c_{n-m} \end{cases}}$$

0.2.5 דוגמה

מישור דו מימדי ב$\mathbb{R}^3$ המוגדר ע"י משוואה ליניארית אחת:
$n = 3$, $\dim L = 2$ אזי נוכל לתאר אותו כמערכת משוואות $2x + y + 3z = 1$.
$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ $\dim L = 1$ ואכן $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

0.2.6 קו ישר ב$\mathbb{R}^n$

$L = a + X_0$ כך ש$\dim X_0 = 1$, $e \in X_0, e \neq 0$. $L = \{x = a + \lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$$
\begin{aligned}
x - a &= \lambda e \\
x_1 - a_1 &= \lambda e_1 \\
&\vdots \\
x_n - a_n &= \lambda e_n
\end{aligned}
$$

$$\lambda = \tfrac{x_1 - a_1}{e_1} = \cdots = \tfrac{x_n - a_n}{e_n}, \quad (e_j \neq 0)\ .$$

0.2.7 קו ישר:

$\tfrac{x_1 - a_1}{e_1} = \cdots = \tfrac{x_n - a_n}{e_n}, \quad (e_j \neq 0)$
n-1 equalations $\quad A \subseteq B$
$A \subseteq B \quad A \subseteq B$
$A \nsubseteq B \quad A \neq B$