חשבון אינפי 1 למדמ"ח

שיעור 10: כלל לופיטל, הגדרות של גבולות במונחים של ε,δ,A,B (ממשיים).

הגדרה: קטע פתוח (a,b) כך ש- $c\in(a,b)$ נקרא **סביבה** של c.

הגדרה: תהי I סביבה של c, אזי $I\setminus\{c\}$ נקראה **הסביבה המנוקבת** של c.

כלל לופיטל לגבולות מהצורה "$\frac{0}{0}$":

תהיינה $f(x),g(x)$ גזירות בסביבה מנוקבת כלשהי של c ו- $g'(x)\neq 0$.

וכן $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$. אם $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים או אינסופי, אזי

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

כלל זה נכון גם כאשר $x\to c^+, x\to c^-, x\to\infty, x\to-\infty$.

כלל לופיטל לגבולות מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$"**:**

תהיינה $f(x),g(x)$ גזירות בסביבה מנוקבת כלשהי של c ו- $g'(x)\neq 0$.

וכן $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=\infty$. אם $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים או אינסופי, אזי

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

כלל זה נכון גם כאשר $x\to c^+, x\to c^-, x\to\infty, x\to-\infty$.

1. חשבו את הגבולות הבאים: (היעזרו בכלל לופיטל אם ניתן)

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ זהו גבול מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$", אך גבול מנת הנגזרות $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ **אינו קיים** ולכן לא ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1$$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ זהו גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$", אך גבול מנת הנגזרות $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ אינו קיים ולכן לא ניתן להשתמש בכלל לופיטל.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0.$$

ג. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\ln\left(\cos\left(2x^2-x\right)\right)}$ זהו גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$", הפונקציות במונה ובמכנה גזירות וקיימת סביבה מנוקבת של $x=0$ כך שהנגזרת של המכנה

$\left(\ln\left(\cos\left(2x^2-x\right)\right)\right)'=\frac{-(4x-1)\sin\left(2x^2-x\right)}{\cos\left(2x^2-x\right)}\neq 0$ ולכן נשתמש בכלל לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\ln\left(\cos\left(2x^2-x\right)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{6x\cos 3x^2}{\frac{-(4x-1)\sin\left(2x^2-x\right)}{\cos\left(2x^2-x\right)}}=\lim_{x\to 0}\frac{6x\cos 3x^2\cos\left(2x^2-x\right)}{-(4x-1)\sin\left(2x^2-x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(2x^2-x\right)}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 3x^2\cos\left(2x^2-x\right)}{-(4x-1)}$$

הגבול השמאלי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(2x^2-x\right)}$ עדיין מהצורה "$\frac{0}{0}$" ולכן שוב נשתמש בכלל לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\left(2x^2-x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(4x-1)\cos\left(2x^2-x\right)}=-1$$

והגבול הימני $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\cos 3x^2\cos\left(2x^2-x\right)}{-(4x-1)}=6$ ולכן קיבלנו:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\ln\left(\cos\left(2x^2-x\right)\right)}=-1\cdot 6=-6.$$

ד. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$ זהו גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$", כל התנאים של כלל לופיטל מתקיימים (הפונקציות של מונה ומכנה גזירות ונגזרת המכנה לא מתאפסת בסביבה מנוקבת של $x=0$)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x\cos(\sin x)}{3x^2}$ הגבול שקיבלנו עדיין מהצורה "$\frac{0}{0}$" ולכן נפעיל שוב את כלל לופיטל

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x\cos(\sin x)}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+\sin x\cos(\sin x)+\cos^2 x\sin(\sin x)}{6x}$$

ושוב נשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x\cos(\sin x)}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+\sin x\cos(\sin x)+\cos^2 x\sin(\sin x)}{6x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+\cos x\cos(\sin x)-\sin x\cos x\sin(\sin x)-2\cos x\sin x\sin(\sin x)+\cos^3 x\cos(\sin x)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}$$

ה. $\lim\limits_{x\to\infty}e^x\sin\frac{1}{x}$ גבול מהצורה "$\infty\cdot0$"

פתרון:

$\lim\limits_{x\to\infty}e^x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{-x}}$ הגבול האחרון הינו מהצורה "$\frac{0}{0}$" כל התנאים של כלל לופיטל מתקיימים, כלומר המונה והמכנה הן פונקציות גזירות בכל קרן מהצורה (a,∞) כאשר $a>0$ והנגזרת של המכנה לא מתאפסת בקרן ולכן

$\lim\limits_{x\to\infty}e^x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$ שימו לב המעבר האחרון (למכפלת הגבולות) מוצדק, כי הגבול של $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$ (השתמשנו פעמיים בכלל לופיטל)

לסיכום $\lim\limits_{x\to\infty}e^x\sin\frac{1}{x}=\infty$

ו. $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$ גבול מהצורה "0^0"

פתרון:

$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln x^x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$ המעבר האחרון מותר בגלל הרציפות של הפונקציה e^x.

מספיק לחשב $\lim_{x\to0^+} x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$ (כאן השתמשנו בכלל לופיטל)

לסיכום נקבל $\lim_{x\to0^+} x^x=e^0=1$

ז. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ גבול מהצורה "$\infty-\infty$"

פתרון:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x}{x\ln x+x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{-1}{\ln x+1+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

עשינו מכנה משותף וכלל לופיטל פעמיים.

ח. $\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$ גבול מהצורה "∞^0"

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}}$$

ולכן מספיק לחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}$ שהינו מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$".

נשתמש בכלל לופיטל $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{27e^{3x}}{9e^{3x}}=3$

(למעשה הפעלנו את כלל לופיטל 3 פעמים).

לסיכום נקבל $\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$.

ט. $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ גבול מהצורה "1^∞"

פתרון:

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\ln(\cos x)^{1/x^2}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}$$

מספיק לחשב את הגבול $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ שהינו מהצורה "$\frac{0}{0}$"

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\cos x}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{2}$ (במעבר הראשון השתמשנו בכלל לופיטל)

לסיכום נקבל $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

הגדרת הגבולות במונחים של ε,δ

הגדרה: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ (ממשי) קיים $\delta>0$ (התלוי ב- ε) כך שלכל x המקיים $0<|x-c|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

הגדרה: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ (ממשי) קיים $\delta>0$ (התלוי ב- ε) כך שלכל x המקיים $c<x<c+\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

הגדרה: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ (ממשי) קיים $\delta>0$ (התלוי ב- ε) כך שלכל x המקיים $c-\delta<x<c$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

הגדרה: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ (ממשי) קיים $B>0$ (ממשי התלוי ב- ε) כך שלכל $x>B$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

הגדרה: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ אם לכל $A>0$ (ממשי) קיים $B>0$ (ממשי התלוי ב- A) כך שלכל $x>B$ מתקיים $f(x)>A$.

באופן דומה ניתן להגדיר גבולות: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2. עבור הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0$ מצאו $\delta>0$ ממשי כך שלכל $1-\delta<x<1$ מתקיים $\sqrt{1-x^2}<0.001$.

פתרון: $\sqrt{1-x^2}<0.001$ ולכן $0<1-x^2<10^{-6}$ אס"ם $-1<x<-\sqrt{1-10^{-6}}$ או $\sqrt{1-10^{-6}}<x<1$ צריך לדרוש $\sqrt{1-10^{-6}}<1-\delta<x<1$ ולכן מספיק לבחור $\delta<1-\sqrt{1-10^{-6}}$.

3. עבור הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+4x}=0$ מצאו $B>0$ ממשי כך שלכל $x>B$ מתקיים $\frac{1}{1+4x}<0.01$.

פתרון: $\frac{1}{1+4x}<0.01$ ולכן

$\begin{cases}1<10^{-2}(1+4x)\\1+4x>0\end{cases}$ כלומר $x>\frac{99}{4}$ ולכן מספיק לבחור $B>\frac{99}{4}$.

4. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים של A,B על מנת להוכיח ש- $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-5x)=\infty$

הוכחה: צריך להראות שלכל $A>0$ ממשי קיים $B>0$ ממשי כל שלכל $x>B$ מתקיים $2x^2-5x>A$.

יהי $A>0$ ממשי $2x^2-5x>A$ אם ורק אם $2x^2-5x-A>0$ אם ורק אם $x<\frac{5-\sqrt{25+8A}}{4}$

או $x>\frac{5+\sqrt{25+8A}}{4}$ ולכן מספיק לבחור $B>\frac{5+\sqrt{25+8A}}{4}$ ממשי.

5. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים ε,δ על מנת להוכיח ש-$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-3}=-5$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ממשי. צריך למצוא $\delta>0$ ממשי התלוי ב-ε כך שלכל x המקיים $|x-2|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{2x+1}{x-3}-(-5)\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{2x+1}{x-3}-(-5)\right|=\left|\frac{2x+1+5x-15}{x-3}\right|=\frac{7|x-2|}{|x-3|}$$

נבחר $\delta=\frac{1}{2}$ (שימו לב שצריך לבחור $\delta<1$ כדי שנקודת אי הרציפות $x=3$ לא תהיה בסביבת הנקודה $x=2$), במקרה זה נקבל $-\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2}$ ולכן $-\frac{3}{2}<x-3<-\frac{1}{2}$ ולכן $-2<\frac{1}{x-3}<-\frac{2}{3}$ ולכן $\frac{1}{|x-3|}<2$.

נחזור לאי שוויון המבוקש $\left|\frac{2x+1}{x-3}-(-5)\right|=\left|\frac{2x+1+5x-15}{x-3}\right|=\frac{7|x-2|}{|x-3|}<7\cdot\delta\cdot 2<\varepsilon$, כלומר צריך להתקיים $\delta<\frac{\varepsilon}{14}$ ולכן מספיק לבחור $\delta<\min\left\{\frac{\varepsilon}{14},\frac{1}{2}\right\}$.

6. נסחו את הטענה הבאה במונחים של A,δ : $\lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty$.

$\lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty$ אם לכל $A>0$ ממשי קיים $\delta>0$ ממשי (התלוי ב-A) כך שלכל x המקיים $c<x<c+\delta$ מתקיים $f(x)<-A$.