חשבון אינפי' 27.12.15 הרצאה 17

גבול פו' בנק'

מוסכמה

נקודות a בהן מחשבים את גבולות $\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ הן נקודות הצטברות של תחום הפונקציה.

למה

א. $\lim_{x\to a} c = c$

ב. אם $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} g(x) = c$ אזי:

1. $\lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = b \pm c$
2. $\lim_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = b \cdot c$
3. $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{c}$

כאשר הביטויים מימין מוגדרים היטב. (למשל: $c \neq 0$ בסעיף 3)

ג. סנדוויץ': אם $b \overset{x\to a}{\leftarrow} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \overset{x\to a}{\rightarrow} b$ אזי $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

הוכחה

כל הטענות נובעות מאפיון הגבול בעזרת סדרות, והמשפט המקביל עבור סדרות.

למשל (ג) – תהי $dom(g) \ni \overset{\neq a}{a_n} \to a$.

$$b \overset{x\to a}{\leftarrow} f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n) \overset{x\to a}{\rightarrow} b$$

מהאפיון לפי סדרות. מסנדוויץ' עבור סדרות נקבל $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = b$.

■

למה

אם $b \overset{x\to a}{\rightarrow} f(x) \neq b$, $c \overset{x\to b}{\rightarrow} g(x)$ (b נקודת הצטברות של $dom(g) \cap im(f)$) אז

$g\left(f(x)\right) \overset{x\to a}{\rightarrow} c$

הוכחה

נוכיח עבור ההנחה היותר חזקה, שהפונקציה g מוגדרת על סביבה של b. (**המקרה הכללי** –

תרגיל) תהי $dom(g \cdot f) \ni \overset{\neq a}{a_n} \to a$. בפרט, $a_n \in dom(f)$.

מהנתון, $dom(g) \ni \overset{\neq b}{f(a_n)} \to a$ (כי $a_n \in dom\ (g \cdot f)$).

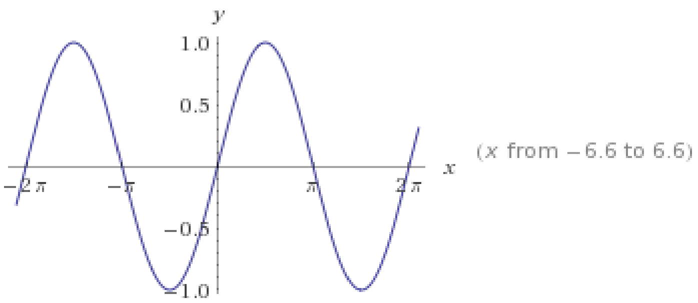
מהנתון השני, $g(f(a_n)) \to c$.

a) נ״ה של $dom(g \cdot f)$: מספיק להוכיח שיש סדרה $dom(g \cdot f) \ni \overset{\neq a}{a_n} \to a$. תהי $dom(f) \ni \overset{\neq a}{a_n} \to a$. ($a$ נקודת הצטברות של $dom(f)$) $\Leftarrow b \neq f(a_n) \to b$. תהי U סביבה של b שבה g מוגדרת. לבסוף, $f(a_n) \in U$. יהי N כך ש - $f(a_N), f(a_{N+1}), \dots \in U$. אז $a_N, a_{N+1}, \dots \in$ $dom(g \cdot f)$ והסדרה הזו שואפת ל - a).

■

דוגמה

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$$



-גרף

שטח המשולש:

$$S_{\Delta} = \frac{(\cos(x) \cdot \sin(x))}{2} \le \frac{\sin(x)}{2} \le S_{\text{פלח}} = \pi \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{x}{2}$$

$\Leftarrow$ עבור $0 \le x \le \left(\frac{\pi}{2}\right)$, $0 \le \sin(x) \le x$. עבור $-\frac{\pi}{2} < x \le 0$: $0 \le -x < \frac{\pi}{2}$, לכן:

$$0 \le \sin(-x)_{=-\sin(x)} \le -x$$

$\Leftarrow x \le \sin(x) \le 0$.

לסיכום:

עבור $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$0 \leftarrow -|x| \le \sin(x)_{\text{מסנדוויץ}\to 0} \le |x| \to 0$$

$$\sin(x)_{\text{ניצב}} \le c_{\text{יתר}} \le x_{\text{קשת על מיתר}}$$

בהגדרת הגבול $\lim_{x \to a} f(x) = b$, אפשר להגביל את x לסביבה W של a כרצוננו:

נניח שבהנתן סביבה V של b, יש סביבה U של a, המוכלת ב $W -$ כך ש - $f(a) \in V$ לכל $a \in U$.

אז קיבלנו תכונה יותר חזקה מהדרוש.

דוגמה

$$\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$$

$$\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)_{\to 0}$$

$$\frac{x}{2} \to_{x\to 0} \left(\frac{0}{2}\right) = 0$$

$$1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \to_{x\to 0} 1 \Leftarrow \sin_{x\to 0}{}^2\frac{x}{2} \to 0\cdot 0 = 0 \Leftarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) \to_{x\to 0} 0 \Leftarrow_{\text{למה}}$$

■

למה

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$$

מהשוואת שטחים,

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

-גרף

$$\frac{\sin x\cdot\cos x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\tan x\cdot 1}{2} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\Leftarrow$

$$1 \overset{x\to 0}{\leftarrow} \cos x \le \left(\frac{\sin x}{x}\right)_{\to 1\ \text{מסנדוויץ'}} \le \frac{1}{\cos x} \overset{x\to 0}{\to} 1$$

כאשר $x < 0$:

$$\cos x \ge \frac{(\sin x)}{x} \ge \frac{1}{\cos x}$$

פורמלית, רואים :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

לכן $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

הגדרה

פונקציה $f(x)$ היא **חסומה** בתחום A אם יש c כך ש - $|f(x)| < c$ לכל $x \in A$.

דוגמה

הפונקציה $\sin x$ חסומה (ע"י 2) בכל $\mathbb{R}$: $|\sin x| \le 1 < 2$.

הערה

$f(x)$ חסומה ב – A $\Leftrightarrow$ יש c_1, c_2 כך ש- $c_1 < f(x) < c_2$ לכל $x \in A$.

למה

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a. אם הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים, אז יש סביבה של a שבה הפונקציה f חסומה.

למה

ניקח למשל $\epsilon := 1$. יהי $b := \lim_{x\to a} f(x)$

אז יש $\delta > 0$ כך ש – $b-\epsilon < f(x) < b+\epsilon$ לכל $a \neq x \in (a-\delta, a+\delta)$. תכונה זו משתמרת כאשר מקטינים את δ. עבור δ קטן מספיק, הקבוצה $(a-\delta, a+\delta)$ מוכלת בסביבה של a שבה f מוגדרת.

(נניח f מוגדרת ב – $(a-\delta_1, a+\delta_2)$ ניקח אפוא $\delta \leq \delta_1$ ואז

$(a-\delta, a+\delta) \subseteq (a-\delta_1, a+\delta_1) \subseteq dom(f)$)

ניקח: $c := \max\{|b-1|, |b+1|, |f(a)|+1\}$.

לכל $x \in (a-\delta, a+\delta)$: אם $x \neq a$:

$|f(x)| < \max\{|b-\epsilon|, |b+\epsilon|\} \leq c$ ואם $x = a$:

$$|f(x)| = |f(a)| < |f(a)| + 1 \leq c$$