חשבון אינפי 1

תרגיל 7

1. בדקו את התכנסות הטורים הבאים:

(א) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sqrt{1-\cos\frac{1}{k}}$

נרשום

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sqrt{1-\cos\frac{1}{k}}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sqrt{2\sin^2\frac{1}{2k}}=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin\frac{1}{2k}.$

הטור הנ"ל אינו מתכנס בהחלט (הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sin\frac{1}{2k}\right|$ מתבדר ע"פ מבחן השוואה עם הטור ההרמוני $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\frac{1}{2n}\right|}{\frac{1}{2n}}=1$), אולם $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{2n}=0$ והסדרה $\{\sin\frac{1}{2n}\}$ מונוטונית יורדת לאפס, ולכן הטור מתכנס ע"פ משפט לייבניץ.

(ב) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt{k^3+1}}{\sqrt{k^7+3k+\sqrt[3]{k+2}}}$

ע"פ מבחן ההשוואה עם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ נקבל $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^7+3n+\sqrt[3]{n+2}}}}{\frac{1}{n^2}}=$ 0 ולכן הטור הנבדק מתכנס בהחלט.

(ג) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots$

נראה כי הטור הנ"ל מתבדר. נתבונן ב $S_{2n}=\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-1}-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right)=$ $\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{k-1}$ ומאחר ו $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\infty$ הטור הנבדק מתבדר.

(ד) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots$

נרשום $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots=$ $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(3k-2)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3k-1}+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=S_1+S_2+S_3$. הסכומים S_1,S_2 מתכנסים ע"פ מבחן לייבניץ ו $S_3=\frac{1}{3}\ln 2$ (טור לייבניץ). לכן הטור הנבדק מתכנס.

(ה) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{k}$

מאחר ו $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\neq 0$, לא מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות ולכן הטור הנבדק מתבדר.

2. הוכיחו שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{3^k}$ מתכנס וחשבו את סכומו עם דיוק 0.01

נראה תחילה כי הסדרה $\{\frac{n}{3^n}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת. באמת, $\frac{n}{3^n}>\frac{n+1}{3^{n+1}}$ מתקיים אם $3n>n+1$, כלומר לכל n טבעי. בנוסף, ברור כי $\lim_{n\to\infty}a_n=$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$. לכן, ע"פ לייבניץ, הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{3^k}$ מתכנס.
כעת, $|r_k|<\frac{k+1}{3^{k+1}}\leq 0.01$ עבור $k=5$ (מינימלי). לכן הסכום עם דיוק 0.01 הינו $S=\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^k k}{3^k}=-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}-\frac{3}{27}+\frac{4}{81}-\frac{5}{243}=-\frac{47}{243}=-0.19$.

3. הוכיחו:

(א) אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס אזי $\sum_{k=1}^{\infty}a_k/k^2$ מתכנס בהחלט

נראה תחילה כי מהתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ נובע כי הסדרה $\{a_n\}$ חסומה. נניח בשלילה שאינה חסומה. אזי, לכל n קיים n_k כל ש $a_{n_k}>n$. לכן קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}\subseteq\{a_n\}$ שאינה מתכנסת לאפס, בסתירה לכך שעבור טור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס מתקיים בהכרח $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.
לפיכך, קיים $M>0$ כך ש $|a_n|\leq M/(\sum_{k=1}^{\infty}1/k^2)$ לכל n טבעי.
לכן $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|/k^2\leq M$, ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k/k^2$ מתכנס בהחלט (סדרת הסכומים החלקיים שלו מוטונית עולה וחסומה).

(ב) אם $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס בתנאי והטור $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ מתכנס בהחלט, אזי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k$ מתכנס בהחלט

נניח כי $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|=B$. מהתכנסות בתנאי של $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ נובע כי קיים $M>0$ כך ש $|a_n|\leq M/B$ לכל n טבעי. לכן $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k b_k|\leq M$ ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k$ מתכנס בהחלט.

(ג) נתון טור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס בתנאי. נסמן $P_n=\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+a_k)/2$, $Q_n=\sum_{k=1}^{n}(|a_k|-a_k)/2$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}P_n/Q_n=1$.

נסמן $S=\lim_{n\to\infty}(P_n-Q_n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$. ידוע כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס בתנאי ולכן $\lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|-a_k)/2=\infty$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{P_n-Q_n}{Q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}-1=\frac{S}{\infty}=0$, ונקבל $\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=1$ כנדרש.

בהצלחה!