תרגיל 4 בפונקציות מרוכבות

שאלות להגשה

1. מצאו פונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$.
רמז: אם $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ אפשר לנסות לחפש u,v מהצורה

$$u(x,y)=u_1(x)+u_2(y),\quad v(x,y)=v_1(x)+v_2(y)$$

פתרון: : אם משוואות קושי רימן ייצאו לנו

$$x^2+y^2=2\quad x^2=y^2$$

אז קל לראות שהנקודות שבהן הפונקציה גזירה הן רק הנקודות הרצויות. צריך למצוא פונקציה שאלו משוואות קושי רימן שלה.
נכתוב את המשוואות בתור

$$x^2=2-y^2\quad x^2=y^2$$

נחליט ש $u_x=x^2$ ולכן $u=\frac{1}{3}x^3+C(y)$ כאשר $C(y)$ היא פונקציה שתלויה רק ב y. כמו כן נחליט ש $u_y=y^2$ ולכן $u=\frac{1}{3}y^3+C(x)$ כלומר בינתיים נראה שאפשר לקחת

$$u(x,y)=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2$$

בהתאמה נקבל לפי משוואות קושי רימן

$$v_y=2-y^2\quad v_x=-x^2$$

ולכן

$$v(x,y)=2y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}x^3$$

כלומר הפונקציה

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2+i(2y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}x^3)$$

מתאימה לדרישות.

2. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z\mid |z|<R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\overline{z})}$ גזירה שם.
פתרון: ראשית נשים לב ש $\overline{f(\overline{z})}$ מוגדרת בתחום המדובר כי $z\in\{z\mid |z|<R\}\Leftrightarrow\overline{z}\in\{z\mid |z|<R\}$. אם נכתוב

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$\overline{f(\overline{z})}=U(x,y)+iV(x,y)$$

אז בעצם

$$U(x,y) = u(x,-y) \quad V(x,y) = -v(x,-y)$$

ולכן U,V בוודאי דיפרנציאביליות כנדרש ובנוסף

$$U_x(x,y) = u_x(x,-y) = v_y(x,-y) = V_y(x,y)$$

$$U_y(x,y) = -u_y(x,-y) = v_x(x,-y) = -V_x(x,y)$$

כלומר משוואות קושי רימן מתקיימות כנדרש.

3. עבור הפונקציות $u(x,y)$ הבאות, מצאו $v(x,y)$ כך שהפונקציה

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

תהיה גזירה בתחום הנתון. בטאו את f לפי z (יוצא משהו פשוט).

(א) $u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ בכל $\mathbb{C}$.
פתרון: נמצא את v לפי משוואות קושי רימן

$$u_x(x,y) = (e^x + xe^x)\cos y - e^x y \sin y = v_y$$

ולכן

$$v(x,y) = \int (e^x + xe^x)\cos y - e^x y \sin y \mathrm{d}y$$

נזכור ש

$$\int y \sin y \mathrm{d}y = -y\cos y + \int \cos y \mathrm{d}y = -y\cos y + \sin y$$

ולכן

$$v(x,y) = (e^x + xe^x)\sin y + e^x(y\cos y - \sin y) + C(x) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + C(x)$$

לפי משוואות קושי רימן השנייה,

$$v_x(x,y) = (e^x + xe^x)\sin y + e^x y \cos y + C'(x) = xe^x \sin y + e^x \sin y + e^x y \cos y = -u_y(x,y)$$

כלומר

$$C'(x) = 0$$

ולכן $C(x)$ קבוע. כלומר

$$v(x,y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + D \quad D \in \mathbb{R}$$

כמו כן קל לראות ש u,v שקיבלנו מקיימות את משוואות קושי רימן ולכן f שקיבלנו באמת גזירה. נשים לב ש

$$\begin{aligned}f(z) &= xe^x\cos y - ye^x\sin y + i(xe^x\sin y + e^x y\cos y + D)\\ &= xe^x(\cos y + i\sin y) - ye^x(\sin y - i\cos y) + iD\\ &= xe^x e^{iy} + iye^x(\cos y + i\sin y) + iD\\ &= xe^{x+iy} + iye^{x+iy} + iD = ze^z + iD\end{aligned}$$

(ב) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x$ ב $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

פתרון: כמו בסעיף הקודם

$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$$

כלומר

$$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

ולכן

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$$

לפי משוואת קושי רימן השניה

$$u_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y)$$

ולכן

$$C(y) = y + D \quad D\in\mathbb{R}$$

כלומר

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + y + D$$

וקל לוודא שמשוואות קושי רימן מתקיימות. כמו כן,

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{x}{x^2+y^2} + x + i(-\frac{y}{x^2+y^2} + y + D)\\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} + x + iy + iD = \frac{\overline{z}}{|z|^2} + z + iD\\ &= z + \frac{1}{z} + iD\end{aligned}$$

4. הוכיחו כי

(א) לכל z מתקיים $|e^z| \leq e^{|z|}$

פתרון: אם $z = x + iy$ אז

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| = e^x$$

$$e^{|z|} = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

היות ש $x \leq \sqrt{x^2+y^2}$ בוודאי ש

$$e^x \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(ב) מתקיים שוויון אם ורק אם z ממשי אי שלילי.

פתרון: אם z ממשי אי שלילי ברור שמתקיים שוויון. אם מתקיים שוויון אז

$$e^x = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

כלומר

$$x = \sqrt{x^2+y^2}$$

וזה וודאי מכריח $0 \leq x$ ו $y = 0$.

5. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos \overline{z}$ גזירה.

פתרון:

$$\cos \overline{z} = \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^y + e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

ברור שה $\frac{1}{2}$ לא משפיע אז נתעלם ממנו לנוחות. יש לנו

$$(\cos x + i \sin x)e^y + e^{-y}(\cos x - i \sin x)$$

כלומר

$$u(x,y) = \cos x(e^y + e^{-y}) \quad v(x,y) = \sin x(e^y - e^{-y})$$

ברור שהכל דיפרנציאבילי

$$\begin{aligned} u_x &= -\sin x(e^y + e^{-y}) \\ u_y &= \cos x(e^y - e^{-y}) \\ v_x &= \cos x(e^y - e^{-y}) \\ v_y &= \sin x(e^y + e^{-y}) \end{aligned}$$

כלומר משוואות קושי רימן הן

$$-\sin x(e^y + e^{-y}) = \sin x(e^y + e^{-y})$$

$$\cos x(e^y - e^{-y}) = -\cos x(e^y - e^{-y})$$

היות ש $e^y + e^{-y} > 0$ המשוואה הראשונה מכריחה ש $\sin x = 0$ כלומר ש $x = \pi k$
לכן $\cos x \neq 0$ והמשוואה השניה אומרת ש

$$e^y - e^{-y} = 0$$

שזה בקלות מכריח $y = 0$. לכן הנקודות היחידות שבהן הפונקציה גזירה הן

$$\{(\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

6. מצאו נוסחא רב ערכית עבור $\arctan z$. (כלומר, בהינתן $w = \tan z$ בטאו את z באמצעות w, מותר להשתמש בפונקציות רב ערכיות).
פתרון: נניח $\tan w = z$, כלומר

$$\frac{\sin w}{\cos w} = z$$

$$\frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = z$$

$$e^{iw} - e^{-iw} = ize^{iw} + ize^{-iw}$$

$$e^{2iw} - 1 = ize^{2iw} + iz$$

$$e^{2iw}(1 - iz) = iz + 1$$

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$2iw = \log\frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$w = \arctan z = \frac{1}{2i}\log\frac{1 + iz}{1 - iz}$$

7. יהי Log הענף העיקרי של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C}\backslash\{-t \mid t \geq 0\}$.

(א) הראו כי לכל z בתחום ההגדרה של Log מתקיים

$$\operatorname{Log}\frac{1}{z} = -\operatorname{Log} z$$

פתרון: עבור הענף העיקרי של הלוגריתם

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$$

כאשר

$$\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$$

אם נסמן

$$z = Re^{i\theta}$$

אז כמובן

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{R}e^{-i\theta}$$

ולכן

$$\operatorname{Log}\frac{1}{z} = \ln|\frac{1}{z}| + i\operatorname{Arg}(\frac{1}{z}) = -\ln|z| - i\theta = -\operatorname{Log} z$$

(ב) הראו שכלל זה לא בהכרח נכון עבור ענפים אחרים של הלוגריתם.
פתרון: אם נבחר ענף שעבורו הזוית היא בין $(0, 2\pi)$ וניקח $z = i$ אז

$$\log\frac{1}{z} = \log(-i) = \frac{3\pi i}{2}$$

ו

$$-\log z = -\log i = -i\frac{\pi}{2}$$

כך שאין שוויון.

תרגילים לא להגשה. מומלץ לעשות וזה יכול להיות גם הכנה טובה לבוחן.

1. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות/אנליטיות:

(א) $f(z) = x^3 + iy^3$

(ב) $f(z) = z + \operatorname{Re}(z)$

(ג) $f(z) = x^3 + y^5$

2. מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ שבהן $f(z) = \overline{z}e^{-17z^2}$ גזירה.

3. תהי $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = u(x+y) - iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x)

4. תהי $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2-v^2=c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.
רמז: הגדירו $g(z)=(f(z))^2$

5. תהיינה שתי פונקציות

$$f_1(x,y)=u(x,y)+iv_1(x,y)$$

$$f_2(x,y)=u(x,y)+iv_2(x,y)$$

המוגדרות וגזירות בתחום D. הוכיחו כי v_1-v_2 הוא מספר קבוע.

6. הביאו את המספרים הבאים לצורה קרטזית

(א) $\sin(i)$.
(ב) $\cos(-i)$
(ג) $\tan(1+i)$

7. מצאו את כל הערכים האפשריים של הביטויים הבאים:

(א) $(1+i)^{2i}$
(ב) $(-i)^{-i}$
(ג) $\mathrm{Im}((1-i)^{1+i})$

8. הראו שחוק החזקות $e^{zw}=(e^z)^w$ נכשל (כאשר החזקה מוגדרת עם הענף העיקרי של הלוגריתם) ע"י בחירה של z,w מתאימים.

9. פתרו את המשוואה $e^{e^z}=1$.