תרגיל 1

להגשה עד 13.11.17

שאלה 1

יהיו X קבוצה, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$. הראו כי לכל $F \in \sigma(\mathbb{A})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש: $F \in \sigma(\mathbb{B})$.

הדרכה:

1. הראו כי קבוצת הקבוצות ב־ $\sigma(\mathbb{A})$ המקיימת תכונה זו הינה σ אלגברה.
2. הראו כי הקבוצות ב־$\mathbb{A}$ מקיימות תכונה זו והסיקו את הנדרש.

שאלה 2

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$. הראו שאם A קבוצה חסומה אזי $m^*(A) < \infty$. האם ההפך נכון?

שאלה 3

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$. נגדיר $aA + b$ להיות התמונה של A תחת הטרנספורמציה הלינארית $T(x) = ax + b$, כלומר: $aA + b = \{ax + b \ : \ x \in A\}$.

1. הוכיחו כי $m^*(aA + b) = |a|m^*(A)$.
2. נתון כי A מדידה לבג. האם $aA + b$ מדידה לבג?

שאלה 4

נאמר שקבוצה $S \subset \mathbb{R}^2$ היא מטיפוס $\mathbf{G}_\delta$ אם ניתן להציג אותה כחיתוך מני של קבוצות פתוחות.

תהי $E \subset \mathbb{R}^2$. הוכיחו שקיימת קבוצה $S \in \mathbf{G}_\delta$ עבורה מתקיים: $E \subseteq S$, וכן $m^*(S) = m^*(E)$.

הדרכה: עקבו אחרי השלבים הבאים:

1. השתמשו בהגדרה של m^* והוכיחו שלכל קבוצה $E \subset \mathbb{R}^2$, ולכל $\epsilon > 0$, קיימת קבוצה פתוחה O המקיימת

$$m^*(O) < m^*(E) + \epsilon.$$

2. בנו סדרה של קבוצות פתוחות מתאימות ע"פ א' וחיתכו אותן.

שאלה 5

עבור $x \in [0,1)$, נסמן $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ את הפיתוח העשרוני של x.
תהי $A = \{x : x \in [0,1) \text{ and } x_6 \leq 5\}$,

1. הוכיחו כי: $m^*(A) = 0.6$.
2. האם A מדידה לבג?

בהנאה!