

פיסיקה למתמטיקאים

פני כדור הארץ

1. הראו כי הגובה של נקודה על פני כדור "א" האמיתי, ביחס לכדור "א" הספרי, נתון ע"י

$$(1) \quad h(\theta) = R \left(\frac{R\Omega^2}{6g} \right) (3 \cos^2 \theta - 1),$$

כאשר R רדיוס כדור "א" הספרי, θ מעלת קו הרוחב המתאים ו Ω המהירות הזוויתית של כדור "א".

נתבונן בחלקיק חומר בעל מסה m על פני כדור "א". הכח הצנטריפוגלי הפועל עליו נתון ע"י $F_c = m\Omega^2 x$ כאשר x המרחק מציר הסבוב של כדור "א". הפוטנציאל המתאים הינו $V_c = -m\Omega^2 x^2/2$ ופוטנציאל הגרביטציה נתון ע"י $V_g = mgh$. על מנת שפני כדור "א" יהיו סטטיים הפוטנציאל הכולל חייב להיות קבוע (הכח הכולל אפס), כלומר

$$(2) \quad mhg - \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 = C.$$

נסמן $x = r \cos \theta$ כאשר $r = R+h$ המרחק מהחלקיק למרכז כדור "א" ונקבל (בקרום של $r \approx R$)¹

$$(3) \quad h(\theta) = A \cos^2 \theta + B,$$

כאשר $A = \Omega^2 R^2/2g$, $B = C/mg$ משימור נפח כדור "א"

$$(4) \quad \int_0^\pi h(\theta) 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = 0$$

נקבל $B = -A/3$ ונסיים.

¹ $h_{max} \simeq 7Km^1$ על קו המשווה ואילו $R \simeq 6300Km$ ולכן הקרום טוב.