

תרגיל תיאורטי 4

20 בינואר 2017

1. יהיו $b \in \mathbb{R}^4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$. נרצה לפתור את המערכת

$Ax = b$ אך למזלנו למערכת זאת אין פתרון (אתם מוזמנים לבדוק...). אז מה כן? נרצה למצוא פתרון מקורב b' . מה זה אומר? נרצה למצוא $b' \in \mathbb{R}^4$ כך ש

(א) למערכת $Ax = b'$ יש פתרון.

(ב) הסטיה $b - b'$ מינימאלית כלומר ש $\|b - b'\|$ מינימאלי (כאשר $\|\cdot\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על \mathbb{R}^4)

מצאו b' כנדרש וחשבו את הסטיה $\|b - b'\|$.

הדרכה: מצאו תחילה בסיס או"ג ל $C(A)$ והשתמשו בו על מנת להטיל את b על $C(A)$.

2. יהא V ממ"פ (עם מ"פ $\langle v_1, v_2 \rangle$ ונורמה מורשית $\|v\|$) ויהא $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס או"ג הוכיחו כי

(א) לכל $v \in V$ מתקיים כי $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$.

(ב) לכל צירוף לינארי $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ של איברי B מתקיים $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$

3. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4.

(א) יהא \mathbb{R}^n ממ"פ עם המכפלה הסקלארית. הוכיחו כי לכל $v, w \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^t w \rangle$

(ב) תהא $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה המקיימת $Q^t Q = I$ (כלומר מטריצה או"ג) ויהא λ ע"ע שלה. הוכיחו כי $\lambda \in \{\pm 1\}$.
הדרכה: הוכיחו כי מתקיים לכל v כי $\langle Qv, Qv \rangle = \langle v, v \rangle$

5. יהיו $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים. נגדיר מטריצת ונדרמונט להיות

$$V(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

למשל

$$V(3, 2, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי

$$|V(a_0, \dots, a_{n-1})| = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)$$

למשל

$$|V(3, 2, 4)| = (4 - 2)(4 - 3)(2 - 3)$$

הדרכה: בצעו את פעולות העמודה האלמנטריות הבאות לפי הסדר הבא

$$\begin{aligned} C_n - a_0 C_{n-1} &\rightarrow C_n \bullet \\ C_{n-1} - a_0 C_{n-2} &\rightarrow C_{n-1} \bullet \\ C_2 - a_0 C_1 &\rightarrow C_2 \bullet \end{aligned}$$

• השתמשו ברקורסיה/אינדוקציה על מנת להגיע לפתרון.

כאשר C_i זה עמודה i של המטריצה (שימו לב שפעולות אלו לא משנות את הדטרמיננטה)

(ב) הוכיחו כי $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים שונים אמ"מ המטריצה $V(a_0, \dots, a_{n-1})$ הפיכה.

6. תהא $A \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $\text{rank}(A - 3I) = 5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע שווה ל - 5. הוכיחו כי A לכסינה מעל \mathbb{R} ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.

7. נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

מצאו את הפולניום האופיני של A , ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.

8.

(א) תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ כך שכל שורה של A מסתכמת לאותו מספר שנסמנו λ . הוכיחו כי λ ע"ע של A .

למשל למטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ יש ערך עצמי 6 כי כל שורה מסתכמת ל 6.
רמז: חישובו מי ה"ע המתאים.

(ב) תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ מצא מטריצה P או"ג ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP = D$

9. תזכורת: סדרת פיבונאצי $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ היא הסדרה המוגדרת בצורה רקורסיבית כך:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

מצא נוסחה מפורשת ל F_n
הדרכה:

(א) שימו לב כי מתקיים לכל n

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

(ב) הוכיחו כי מתקיים לכל n טבעי כי

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

(ג) ע"י לכסון A חשבו מפורשות את A^n (אם $A = PDP^{-1}$ אזי $A^n = \dots$)

(ד) הסיקו את F_n