# תרגיל תיאורטי 3

1. מצאו בסיס עבור המרחב הוקטורי
$U=\{a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3\in R_3[x]\mid a_1+3a_2=a_3\,,\ \ a_2+a_3=a_4\}$.

2) הוכיחו כי $U=\left\{p(x)\in R_2[x]\mid p(-1)=p'(-1)=0\right\}$ הוא תת מרחב של $R_2[X]$ ומצאו לו בסיס.

3) א. הוכיחו שהקבוצה הסדורה $\mathrm{S}=\{1,\ \mathrm{x}-2,\ (\mathrm{x}-2)^2,\ (\mathrm{x}-2)^3\}$ מהווה בסיס של $\mathrm{R}_3[\mathrm{x}]$.
ב. יהי $g(x)=2-5x+6x^2-x^3$ , מצאו את $[g(x)]_S$ (וקטור הקואורדינאטות של $g(x)$ ביחס לבסיס הסדור S).

4) א. יהי $U$ מרחב הפולינומים האי זוגיים ממעלה קטנה או שווה ל- 5, בתוספת פולינום האפס.
הוכיחו שהקבוצה הסדורה $S=\{2x+x^5,\ \ x^3-x^5,\ \ x+x^3\}$ מהווה בסיס ל- $U$.
ב. יהי $g(x)=2x^5-x^3+5x$. מצאו את $[g(x)]_S$ (וקטור הקואורדינטות של $g(x)$ ביחס לבסיס הסדור S).

5) נתונים הוקטורים

$$\vec{v_1}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \vec{v_2}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \vec{v_3}=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\quad \vec{v_4}=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{v_5}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix},\quad \vec{v_6}=\begin{bmatrix}2\\-5\\-3\end{bmatrix},\quad \vec{v_7}=\begin{bmatrix}1\\-4\\-2\end{bmatrix}$$

א. מצאו בסיס של $V=Sp\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4}\}$ והשלימו לבסיס של $R^3$.
ב. מצאו בסיס של $W=Sp\{\vec{v_5},\vec{v_6},\vec{v_7}\}$ והשלימו לבסיס של $R^3$.
ג. מצאו בסיס של $V\cap W$ והשלימו לבסיס של $R^3$.

6) עבור המטריצה הנתונה $A$ מצאו בסיס למרחב השורות, מצאו בסיס למרחב העמודות ובדקו שאכן דרגת השורות = דרגת העמודות.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&9&-1\\-3&8&3\\-2&3&2\end{bmatrix}$$

7) תהי $A\in M_{7\times 3}(R)$ כך ש- $rank\,A=3$.
א. האם שורות $A$ תלויות או בלתי תלויות לינארית?
ב. האם עמודות $A$ תלויות או בלתי תלויות לינארית?

ג. מהו מימד מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $A\vec{x}=\vec{0}$
?( $\vec{x}\in R^3, \vec{0}\in R^7$

8 ) יהיו $\overrightarrow{u_2}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\overrightarrow{u_1}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ וקטורים במרחב $R^4$.

א. הוכיחו שאוסף כל הוקטורים ב- $R^4$ האורתוגונלים לשני הוקטורים האלו, הוא תת-מרחב של $R^4$. נסמן תת מרחב זה ע״י $W$.

ב. מצאו בסיס ל- $W$.

9) הוכיחו שלכל $\vec{u},\vec{v}\in R^n$ מתקיים $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ אם ורק אם $\vec{u},\vec{v}$ אורתוגונלים.
מה המשמעות הגיאומטרית של מה שהוכחתם עבור המקרה הפרטי $\vec{u},\vec{v}\in R^3$ ?

10) תהי $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית. חשבו את $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|^2$.

11)מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב הפתרונות של מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&1&3\\1&2&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$