תרגיל תיאורטי 3

1. מצא בסיס עבור המרחב הוקטורי

$$U=\{[a_1,a_2,a_3,a_4]^t\in R^4 \;\Big|\; \sum_{i=1}^{4}a_i=0,\;\; a_i\in R\}$$

2. הוכיחו כי הוכיחו כי $U=\{p(x)\in R_2[x]\;|\;p(-1)=p'(-1)=0\}$ הוא תת מרחב של $R_2[X]$ ומצאו לו בסיס.

3. הוכיחו שהקבוצה $\mathrm{S}=\{1,\ \mathrm{x}-2,\ (\mathrm{x}-2)^2,\ (\mathrm{x}-2)^3\}$ מהווה בסיס של $\mathrm{R}_3[\mathrm{x}]$.

4. יהי U מרחב הפולינומים האי זוגיים ממעלה קטנה או שווה ל- 5, בתוספת פולינום האפס ותהי $S=\{2x+x^5,\;\; x^3-x^5,\;\; x+x^3\}$. הוכיחו שהקבוצה S מהווה בסיס ל- U.

5. נתונים הוקטורים

$$\vec{v_1}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \vec{v_2}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \vec{v_3}=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix},\quad \vec{v_4}=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{v_5}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix},\quad \vec{v_6}=\begin{bmatrix}2\\-5\\-3\end{bmatrix},\quad \vec{v_7}=\begin{bmatrix}1\\-4\\-2\end{bmatrix}$$

א. מצאו בסיס של $V=Sp\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4}\}$ והשלימו לבסיס של R^3.

ב. מצאו בסיס של $W=Sp\{\vec{v_5},\vec{v_6},\vec{v_7}\}$ והשלימו לבסיס של R^3.

ג. מצאו בסיס של $V\cap W$ והשלימו לבסיס של R^3.

6. עבור המטריצה הנתונה A מצאו בסיס למרחב השורות, מצאו בסיס למרחב העמודות ובדקו שאכן דרגת השורות = דרגת העמודות.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&9&-1\\-3&8&3\\-2&3&2\end{bmatrix}$$

7. תהי $A\in M_{7\times3}(R)$ כך ש- $rank\,A=3$.

א. האם שורות A תלויות או בלתי תלויות לינארית?

ב. האם עמודות A תלויות או בלתי תלויות לינארית?

ג. מהו מימד מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $A\vec{x}=\vec{0}$ ($\vec{x}\in R^3,\vec{0}\in R^7$)?

8. יהיו $\vec{u_2}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ $\quad \vec{u_1}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ וקטורים במרחב R^4.

א. הוכיחו שאוסף כל הוקטורים ב- R^4 האורתוגונלים לשני הוקטורים האלו, הוא תת-מרחב של R^4. נסמן תת מרחב זה ע"י W.

ב. מצאו בסיס ל- W.

9. הוכיחו שלכל $\vec{u},\vec{v}\in R^n$ מתקיים $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ אם ורק אם $\vec{u},\vec{v}$ אורתוגונלים

10. תהי $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית. חשבו את $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|^2$.

11. מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב הפתרונות של מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$