תרגיל כיתה 5 – אנליזה מודרנית

1. **תרגיל:**

תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית. הראו שהקבוצה $\{x\in U: f \text{ is continuous at x}\}$ היא מטיפוס G_δ.

פתרון:

לכל $x\in U,\delta>0$ נגדיר את התנודה ("oscillation") של f בכדור $B(x,\delta)$ ע"י $\omega(x,\delta):=\sup\{|f(s)-f(t)|: s,t\in B(x,\delta)\}$, ונקודתית ע"י $\omega(x):=\inf\{\omega(x,\delta):\delta>0\}$.

אנו טוענים שלכל a ממשי הקבוצה $E_a=\{x:\omega(x)<a\}$ היא פתוחה.

הוכחת הטענה:

יהי $x_0\in E_a$, ישנה $\delta_0>0$ כך ש- $\omega(x_0,\delta_0)=\sup\{|f(s)-f(t)|: s,t\in B(x_0,\delta_0)\}<a$

(אחרת ה-inf של כולם לא היה קטן מ-a). לכן לכל $x\in B\left(x_0,\frac{\delta_0}{2}\right)$,

$$\omega\left(x,\frac{\delta_0}{2}\right)=\sup\left\{|f(s)-f(t)|: s,t\in B\left(x,\frac{\delta_0}{2}\right)\right\}\le\sup\{|f(s)-f(t)|: s,t\in B(x_0,\delta_0)\}<a$$

ומכאן כ-inf, $\omega(x)<a$ לכל $x\in B\left(x_0,\frac{\delta_0}{2}\right)$, והטענה הוכחה.

ניתן לראות כי f רציפה בנקודה x או"א $\omega(x)=0$ (אין תנודה בנקודה x) ולכן:

$\{x: f \text{ is continuous at x}\}=\{x:\omega(x)=0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x:\omega(x)<\frac{1}{n}\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{\frac{1}{n}}$. הקבוצות $E_{\frac{1}{n}}$ כולן פתוחות, ולכן הקבוצה המדוברת היא באמת מטיפוס G_δ. מש"ל.

הערה:

ניתן להוכיח שזה נכון בכל מרחב מטרי.

למת פאטו

תזכורת: ראינו בהרצאה את למת פאטו האומרת שאם $f_n:X\to[0,\infty]$, פונקציות מדידות אזי מתקיים $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$.

דוגמא לאי שוויון חזק:

נתבונן במממ"ח $(\mathbb{R},L,m)$, ונגדיר סדרת פונקציות פשוטות ע"י $f_n(x)=\frac{1}{n}$. קל לראות:

1. $\underline{\lim} f_n=0$

2. לכל n $\int_{\mathbb{R}} f_n dm = \infty$

ולכן האי-שוויון בלמת פאטו הוא חזק: $0 < \infty$.

2. תרגיל (למת פאטו ההפוכה) : הוכיחו כי אם $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות המוגדרות על הממ"ח (X, S, μ) . אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $|f_n| \le g$ לכל n , אזי

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

פתרון: נסתכל על סדרת הפונקציות $h_n = g - f_n$, זוהי כמובן סדרה חיובית. בנוסף, האינטגרל $\int_X h_n d\mu = \int_X (g - f_n) d\mu = \int_X g d\mu - \int_X f_n d\mu$, ולכן מוגדר היטב. כעת, עפ"י למת פאטו נקבל

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu = \int_X \left(\liminf_{n\to\infty} g + \liminf_{n\to\infty} (-f_n)\right) d\mu$$

$$= \int_X \liminf_{n\to\infty} g d\mu + \int_X \liminf_{n\to\infty} (-f_n) d\mu = \int_X g d\mu - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n) d\mu$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X -f_n d\mu = \int_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

3. אם f_n הינה סדרה של פונקציות אי-שליליות ואינגרביליות כך ש $f_n \downarrow f$, הראו כי $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

פתרון: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

מצד שני, עפ"י למת פאטו ההפוכה, נובע כי $\int_X f d\mu = \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

לסיכום, קיבלנו $\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \ge \int_X f_n d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$, ומכאן ש

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

4. **<u>תזכורת- משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג:</u>**

אם $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots \le +\infty$ כולן מדידות לבג, אזי פונקצית הגבול שלהן קיימת ומדידה ומתקיים $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

<u>תרגיל:</u>

תהי $f \geq 0$ פונקציה מדידה ואי-שלילית המקיימת $\int_X f d\mu = 0$, הוכיחו כי הקבוצה שבה f חיובית-ממש היא בעלת מידה 0.

<u>**פתרון:**</u>
נגדיר $E := \{x \in X : f(x) > 0\}$, ו-$f_n(x) = n \cdot f(x)$. קל לראות שהסדרה $\{f_n\}$ עומדת בתנאי משפט ההתכנסות המונוטונית ולכן $\int_X \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X nfd\mu = \lim_{n\to\infty} n \cdot \int_X fd\mu = 0$.
נניח בשלילה כי $\mu(E) > 0$, $E \supseteq X$ ולכן $\int_X \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) d\mu \geq \int_E \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) d\mu$. אבל לכל $x \in E$ מתקיים $f(x) > 0$ ולכן $\left(f_n|_E\right)(x) = n \cdot f(x) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. בסה"כ קיבלנו: $\int_X \left(\lim_{n\to\infty} n \cdot f\right) d\mu \geq \int_E (\infty) d\mu = \infty\mu(E) = \infty$. זו סתירה ולכן מש"ל.

<u>**תרגיל:**</u> חשבו את הגבול $I := \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \log\left(2 + \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) dm(x)$. הצדיקו את תשובתכם.

<u>**פתרון:**</u> ניתן לרשום את הגבול בצורה הבאה:
$I = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \log\left(2 + \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x) dm(x)$. ברוח זו נגדיר את הפונקציות המדידות לבג (כי הן רציפות) $f_n(x) := \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \log\left(2 + \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x) \geq 0$ נטען כעת כי $\{f_n\}$ היא סדרה עולה.

<u>הוכחה:</u>
יש להראות כי לכל $0 < x < \infty$

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \log\left(2 + \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) I_{(0,n)}(x) \leq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \log\left(2 + \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right) I_{(0,n+1)}(x)$$

נחלק למספר מקרים:

1. אם $x \geq n+1$ שני האינדיקטורים מתאפסים ומתקיים אי השוויון.
2. אם $n \leq x < n+1$ זה נכון כי f_{n+1} אי שלילית.
3. אם $0 < x < n$ צ"ל $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \log\left(2 + \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) \leq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \log\left(2 + \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$

נראה זאת בשני שלבים:

א. $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$

ב. $\log\left(2 + \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) \leq \log\left(2 + \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$

<u>הוכחת השלבים:</u>

א. ברור כי עבור y מספיק גדול נקבל כי הפונקציה $f\left(y\right)=\left(1-\frac{x}{y}\right)^{y}$ תהיה חיובית. מכאן נקבל כי הפונקציה f עולה אמ"מ $\log\left(f\right)=y\log\left(1-\frac{x}{y}\right)$ עולה. נגזור ונקבל $\left(y\log\left(1-\frac{x}{y}\right)\right)'=\log\left(1-\frac{x}{y}\right)+\frac{xy}{y-x}\xrightarrow{y\to\infty}0+x>0$. מכאן שעבור y גדול מספיק נקבל כי הנגזרת חיובית ומכאן ש $\log\left(f\right)$ עולה ומכאן שהפונקציה $f\left(y\right)$ עולה.

ב. פונקצית הקוסינוס יורדת בקטע $\left(0,1\right)$ ולכן עבור n גדול מספיק נקבל $\cos\left(\frac{x}{n}\right)\le\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$ נוסיף 2 לשני האגפים ונפעיל לוג (שהיא פונקציה עולה) לקבל את הדרוש.

ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג

$$I=\int_{(0,\infty)}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}\log\left(2+\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)I_{(0,n)}\left(x\right)\right]dm\left(x\right)=$$
$$=\int_{(0,\infty)}\left[e^{-x}\log\left(2+1\right)I_{(0,\infty)}\left(x\right)\right]dm\left(x\right)=\log\left(3\right)\int_{(0,\infty)}e^{-x}dm\left(x\right)$$

בהמשך **אולי** נראה את הקשר לאינטגרל הלא אמיתי מתורת רימן ואז ניתן להגיע לתשובה הסופית $I=\log\left(3\right)$.