מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 6

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

.1

א. ציירו את דיאגרמת ההסה של שריג המחלקים של 90.

ב. ניזכר בהגדרת יחס השקילות $R_B := \{(C_1, C_2) : C_1 \cap B = C_2 \cap B\}$.

תהי A קבוצה, נגדיר: $X := \{R_B : B \subseteq A\}$.

נגדיר על X את יחס הסדר הכלה, כלומר נביט בקס"ח $(X, \subseteq)$.

הוכיחו: X הוא שריג (רמז: היעזרו בתרגיל המודרך, תרגיל 5).

.2

א. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ על פי: $f(n) := \max\{m : 2^m \mid n\}$

(לדוגמה, $f(3) = 0,\ f(6) = 1$).

עתה נגדיר יחס $\preceq$ על $\mathbb{N}$ באופן הבא: $\preceq := \{(a,b) : f(a) \le f(b)\}$

הוכיחו: $\preceq$ הוא קדם- סדר.

ב. נגדיר את יחס השקילות $\approx_{\preceq}$ בדומה לתרגול, כך שהיחס $\preceq^{\approx_{\preceq}}$ המושרה על מחלקות השקילות $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ הוא יחס סדר.

מצאו את הסופרימום והאינפימום (אם קיימים, אחרת ציינו שלא) של תת הקבוצות הבאות של $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ עם יחס הסדר $\preceq^{\approx_{\preceq}}$:

1) $\{[a] : f(a) \text{ is prime}\}$.

2) $\{[a] : f(a) < 10\}$.

ג. הוכיחו כי $\preceq^{\approx_{\preceq}}$ הוא יחס סדר לינארי על $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$.

3. ציינו והוכיחו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם חח"ע ו/או על:

א. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(n) = |n|$.

ב. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

ג. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x$.

4. תהיינה A, B, C, D קבוצות ו- $f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$ פונקציות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $h \circ g \circ f$ הפיכה, אז g חח"ע או על.

ב. אם $h \circ g \circ f$ חח"ע ו- $h \circ g$ חח"ע, אז $g \circ f$ חח"ע.

ג. אם $h \circ g \circ f$ על ו- $h \circ g$ על, אז $g \circ f$ על.

ד. אם $h \circ g \circ f$ על ו- $g \circ f$ על, אז $h \circ g$ על.

ה. אם $g \circ f$ הפיכה ו- $h \circ g$ הפיכה, אז g הפיכה.

ו. אם $g \circ f$ הפיכה ו- $h \circ g$ הפיכה, אז $h \circ g \circ f$ הפיכה.

5. תהי $f:A\to B$ פונקציה.

א. הוכיחו: אם $C\subseteq A$ אזי $C\subseteq "f^{-1}"\left("f"(C)\right)$.

ב. תנו דוגמה לפונקציה $f:A\to B$ ו-$C\subseteq A$ כך שההכלה בסעיף א' היא הכלה ממש.

ג. הוכיחו כי בסעיף א' מתקיים שוויון לכל $C\subseteq A$ אמ"מ f חח"ע.

ד. הוכיחו: אם $D\subseteq B$, אזי $"f^{-1}"(D)="f^{-1}"\left("f"\left("f^{-1}"(D)\right)\right)$.

6. תהי $f:A\to B$. נגדיר $g:P(B)\to P(A)$ לפי: $g(B)="f^{-1}"(B)$. הוכיחו: f חח"ע אמ"מ g על.