

פיסיקה למתמטיקאים

אינטגרל יעקובי

1. חרוז בעל מסה m חפשי לנוע על חישוק עם רדיוס R המסתובב במהירות זוויתית ω . ציר הסיבוב מקביל למישור המכיל את החישוק.

(א) רשמו את הלגראנג'יאן עם אילוץ הולונומי מתאים. מכיוון שהמהירות הזוויתית בכוון φ קבועה, נבחר את האילוץ ההולונומי $\varphi = \omega t$ ונרשום את הלגראנג'יאן

$$(1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \theta + \lambda(\varphi - \omega t).$$

(ב) רשמו את אינטגרל יעקובי h . האם h נשמר? מצאו גם את האנרגיה E . האם האנרגיה נשמרת? האם שני הגדלים שווים? אינטגרל יעקובי הינו

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + mgR \cos \theta - \lambda(\varphi - \omega t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$(3) \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \lambda \omega$$

כאשר

$$(4) \quad \lambda = mR^2\omega\dot{\theta} \sin 2\theta$$

מתקבל ממשוואת אויילר לגראנג' עבור φ . האנרגיה נתונה ע"י

$$(5) \quad E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta,$$

ושונה מ h . ברור כי \mathcal{L} לא תלוי מפורשות בזמן ולכן h קבוע. מאחר ופועל כח חיצוני¹ המבצע עבודה ע"י סיבוב החישוק במהירות ω , האנרגיה

¹הכח נתון ע"י רכיב הגרדיאנט בכוון φ $N_\varphi = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} |_{\varphi=\omega t} = \frac{\lambda}{R \sin \theta} = 2mR\omega\dot{\theta} \cos \theta$

אינה קבועה והשינוי באנרגיה נתון ע"י $\omega^2 R^3$

$$(6) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{dh}{dt} = mR^2\omega^2\dot{\theta} \sin 2\theta.$$

2. חרוז בעל מסה m מחליק ללא חיכוך על גבי חישוק חסר מסה בעל רדיוס R . החישוק מסתובב במהירות זוויתית ω . ציר הסיבוב ניצב למישור המכיל את החישוק ועובר דרך מרכזו.

(א) רשמו את הלגראנג'יאן עם אילוץ הולונומי מתאים. הלגראנג'יאן נתון ע"י

$$(7) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta} - \omega)^2 - mgR \cos(\theta - \omega t).$$

(ב) רשמו את אינטגרל יעקובי h . האם h נשמר? מצאו גם את האנרגיה E . האם האנרגיה נשמרת? האם שני הגדלים שווים? אינטגרל יעקובי נתון ע"י

$$(8) \quad h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos(\theta - \omega t) - \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

ומתקיים

$$(9) \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = mgR\omega \sin(\theta - \omega t).$$

האנרגיה שווה ל

$$(10) \quad E = T + V = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta} - \omega)^2 + mgR \cos(\theta - \omega t),$$

וממשוואת אויילר לגראנג'

$$(11) \quad mR^2\ddot{\theta} = mgR \sin(\theta - \omega t)$$

השוויון בנגזרות השלמות מתקבל מאחר ו $E = h|_{\varphi=\omega t}$ ³אם נרשום לגראנג'יאן שאינו תלוי בזמן $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta$ אינטגרל יעקובי קבוע ונקבל $E \neq h$ ובנוסף $\frac{dE}{dt} \neq \frac{dh}{dt}$.

נקבל ⁴

$$\frac{dE}{dt} = mR^2(\dot{\theta} - \omega)\ddot{\theta} - mgR\dot{\theta}\sin(\theta - \omega t) + mgR\omega\sin(\theta - \omega t) = 0.$$

(12)

ראינו אפוא כי $E \neq h$ ובנוסף, האנרגיה בניגוד לאינטגרל יעקובי, נשמרת.

⁴ גם כאן, אם נבחר בקורדינטה המוכללת $\phi = \theta - \omega t$ נקבל את הלגראנגיאן $\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 - mgR\cos\phi$ שאינו תלוי בזמן, עבורו כמובן האנרגיה נשמרת. במקרה כזה אינטגרל יעקובי והאנרגיה שווים, אף על פי שהקורדינטה המוכללת ϕ תלויה מפורשות בזמן.