אביב תשע"ה

פיסיקה למתמטיקאים

אינטגרל יעקובי

1. חרוז בעל מסה m חפשי לנוע על חישוק עם רדיוס R המסתובב במהירות זויתית ω. ציר הסיבוב מקביל למישור המכיל את החישוק.

(א) רשמו את הלגראנג'יאן עם אילוץ הולונומי מתאים.

מכיוון שהמהירות הזויתית בכוון φ קבועה, נבחר את האילוץ ההולונומי $\varphi = \omega t$ ונרשום את הלגראנג'יאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - mgR\cos\theta + \lambda(\varphi - \omega t). \tag{1}$$

(ב) רשמו את אינטגרל יעקובי h. האם h נשמר ? מצאו גם את האנרגיה E. האם האנרגיה נשמרת ? האם שני הגדלים שווים ?

אינטגרל יעקובי הינו

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + mgR\cos\theta - \lambda(\varphi - \omega t), \end{aligned} \tag{2}$$

ו

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \lambda\omega \tag{3}$$

כאשר

$$\lambda = mR^2\omega\dot{\theta}\sin 2\theta \tag{4}$$

מתקבל ממשוואת אויילר לגראנג' עבור φ. האנרגיה נתונה ע"י

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta, \tag{5}$$

ושונה מ h. ברור כי $\mathcal{L}$ לא תלוי מפורשות בזמן ולכן h קבוע. מאחר ופועל כח חיצוני[1] המבצע עבודה ע"י סיבוב החישוק במהירות ω, האנרגיה

[1] הכח נתון ע"י רכיב הגרדיאנט בכוון φ $\quad N_\varphi = -\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}|_{\varphi=\omega t} = \frac{\lambda}{R\sin\theta} = 2mR\omega\dot{\theta}\cos\theta$

אינה קבועה והשינוי באנרגיה נתון ע"י [2] [3]

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dh}{dt} = mR^2\omega^2\dot{\theta}\sin 2\theta. \tag{6}$$

2. חרוז בעל מסה m מחליק ללא חיכוך על גבי חישוק חסר מסה בעל רדיוס R. החישוק מסתובב במהירות זוויתית ω. ציר הסיבוב **ניצב** למישור המכיל את החישוק ועובר דרך מרכזו.

(א) רשמו את הלגראנג'יאן.
הלגראנג'יאן נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}-\omega)^2 - mgR\cos(\theta-\omega t). \tag{7}$$

(ב) רשמו את אינטגרל יעקובי h. האם h נשמר ? מצאו גם את האנרגיה E. האם האנרגיה נשמרת ? האם שני הגדלים שווים ?
אינטרגרל יעקובי נתון ע"י

$$h = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos(\theta-\omega t) - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \tag{8}$$

ומתקיים

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = mgR\omega\sin(\theta-\omega t). \tag{9}$$

האנרגיה שווה ל

$$E = T + V = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}-\omega)^2 + mgR\cos(\theta-\omega t), \tag{10}$$

וממשוואת אויילר לגראנג'

$$mR^2\ddot{\theta} = mgR\sin(\theta-\omega t) \tag{11}$$

[2] השוויון בנגזרות השלמות מתקבל מאחר ו $E = h|_{\varphi=\omega t}$

[3] אם נרשום לגראנג'יאן שאינו תלוי בזמן $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\omega^2\sin^2\theta) - mgR\cos\theta$, אינטגרל יעקובי קבוע ונקבל $E \neq h$ ובנוסף $\frac{dE}{dt} \neq \frac{dh}{dt}$.

נקבל [4]

$$\frac{dE}{dt} = mR^2(\dot\theta - \omega)\ddot\theta - mgR\dot\theta\sin(\theta - \omega t) + mgR\omega\sin(\theta - \omega t) = 0. \quad (12)$$

ראינו אפוא כי $E \neq h$ ובנוסף, האנרגיה בניגוד לאינטגרל יעקובי, נשמרת.

[4] גם כאן, אם נבחר בקורדינטה המוכללת $\phi = \theta - \omega t$ נקבל את הלגראנג'יאן $\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot\phi^2 - mgR\cos\phi$ שאינו תלוי בזמן, עבורו כמובן האנרגיה נשמרת. במקרה כזה אינטגרל יעקובי והאנרגיה שווים, אף על פי שהקורדינטה המוכללת ϕ תלויה מפורשות בזמן.