הרצאה 10

נכתב על ידי נועם יערי

התפלגויות

1) התפלגות אחידה

קובייה הוגנת עם n מצבים, $X\sim U[1,n]$.

$P(X=i)=\frac{1}{n}$ לכל $i=1,\cdots,n$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}i=\frac{n+1}{2}$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}i^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=_{\text{לפי נוסחה}}\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}$$

$$=\frac{n+1}{12}[4n+2-3n-3]=\frac{n^2-1}{12}$$

נוסחה:

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$X\sim E(X)\pm_{-3\leq}c^{\leq 3}\cdot\sqrt{V(X)}$$

2) ברנולי (הרצאה 9)

3) בינומית (בהמשך להרצאה 9)

$X\sim Bin(n,p)$ כאשר X סופר הצלחות בסדרה של n ניסויי ברנולי בלתי תלויים.

חישבו ש $E(X)=np$, נותר לחשב את השונות.

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2_{\text{ידוע}}$

$E(X^2)=E\big(X(X-1)\big)+E(X)$

$$E\big(X(X-1)\big)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k}\cdot k(k-1)=\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}p^kq^{n-k}\cdot k(k-1)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)\big((n-2)!\big)}{(k-2)!\cdot(n-k)!}p^{k-2}\cdot p^2\cdot q^{n-k}=_{\substack{k=j+2\\ j=k-2}}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^jq^{(n-2)-j}\cdot n(n-1)p^2$$

$E(X^2)=n(n-1)p^2+np$

$V(X)=npq$

גישה אחרת:

אפשר להגדיר את X על ידי $X=X_1+\cdots+X_n$ כאשר $X_i\sim b(p)$ בלתי תלויים.

לכן:

$$E(X)=\sum E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p=np$$

כמו כן:

$$V(X)=V\left(\sum X_i\right)=_{\text{תמיד}}\sum_{i}V(X_i)+\underbrace{\sum_{i\neq j}Cov(X_i,X_j)}_{\text{המשתנים בלתי מתואמים בזוגות}}=\sum V(X_i)=npq$$

דוגמה

שחקן משחק n מטעות הוגנים (בלתי תלויים).
את אלו שנפלו על 1 זורקים שוב.
הזכייה שווה למספר המטבעות שנפלו על אחד בפעם השנייה= X.

<u>פתרון 1</u>: נסמן ב – Y את מספר המטבעות שנפלו על 1 בסיבוב הראשון.

$$Y \sim Bin(n, \frac{1}{2})$$

$$X \sim Bin(Y, \frac{1}{2})$$

(התפלגות של X בהינתן Y)

$$E(X) = E(X|Y) = E\left(\frac{1}{2}Y\right) = \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{4}n$$

$$V(X)V\big(E(X|Y)\big) + E\big(V(X|Y)\big) = V\left(\frac{1}{2}Y\right) + E\left(\frac{Y}{4}\right) = \frac{1}{4}V(Y) + \frac{1}{4}E(Y) = \frac{3}{16}n$$

<u>פתרון 2</u>:

$$X \sim Bin\left(n, \frac{1}{4}\right)$$

הסבר מפורט:

$$Y = Y_1 + \cdots + Y_n \ \ , Y_i \sim b\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$X = Y_1 Z_1 + \cdots + Y_n Z_n \ \ , Z_i \sim b\left(\frac{1}{2}\right)$$

4) **התפלגות פואסון**

נניח ש – $X \sim Bin(n,p)$ כאשר $np = E(X) = \lambda_{\text{קבוע}}$.
מה קורה כאשר $n \to \infty$.

$$\Delta t$$

$$X \sim Bin\left(\frac{t}{\Delta t_{\to\infty}}, \lambda \cdot \Delta t_{\to 0}\right)$$

$$P(X=k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(n-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k}}_{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\to 1} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n_{\to e^{-\lambda}} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}_{\to 1} \to \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

$X \sim Poi(\lambda)$ אם $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$

נבדוק שזהו אכן התפלגות:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

איפה פוגשים התפלגות כזו: אם ניקח $X\sim Bin\ (n,p)$, n גדול, p קטן, np נתון.
בקירוב $X\sim Poi(np)$
"חישוב" (אינטואיטיבי) התוחלת והשונות:

$$X\sim Bin(n,p)\Rightarrow E(X)=np=\lambda\Rightarrow V(X)=npq=\lambda\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\to\lambda$$

חישוב (פורמלי) תוחלת והשונות:

$$X\sim Poi(\lambda)$$

$$E(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!}\cdot n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\lambda=\lambda$$

$$E\big(X(X-1)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!}\cdot n(n-1)=\sum_{n=2}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{n-2}\lambda^2}{(n-2)!}=\lambda^2$$

$$\Rightarrow V(X)=E\big(X(X-1)\big)+E(X)-E(X)^2=\lambda$$

דוגמה:
מספר הלקוחות הנכנסים למסעדה בשעה $14^{59}-14^{00}$ ביום 3.6.2017 מתפלג $X\sim Poi(\lambda)$.
לקוח מזמין דג בהסתברות p. השאלה היא מה התפלגות מספר הלקוחות שיזמינו דג. (נסמן ב Y –)

$$X\sim Poi(\lambda)$$
$$Y|X\sim Bin(X,p)$$

נחשב את ההתפלגות של Y.

$$P(Y=n)=\sum_{k=0}^{\infty}P(Y=n|X=k)\cdot P(X=k)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}p^n\cdot q^{k-n}\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}\cdot p^n\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{n!\,(k-n)!}q^{k-n}\cdot\lambda^k=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^n}{n!}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(q\lambda)^{k-n}}{(k-n)!}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^n e^{q\lambda}}{n!}=\frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow Y\sim Poi(p\lambda)$$

תרגיל

$$X\sim Bin(n,p)$$
$$Y\sim Bin(m,p)$$

X,Y בלתי תלויים. $\Leftarrow$ $X+Y\sim Bin(m+n,p)$

תרגיל נוסף:
$X\sim P(\lambda),Y\sim P(\mu)$ בלתי תלויים $\Leftarrow$ $X+Y\sim Poi(\lambda+\mu)$
רמז: לפתח את הביטוי -

$$P(X+Y=n)=\sum\ldots$$