מועד א' ־ בדידה מדעי המחשב (89198)

27.9.2017, ז' תשרי תשע"ח

מרצה: אחיה בר־און
מתרגל: אריאל ויצמן
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- ללא חומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם.
- ניקוד מקסמאלי הוא 120. הניקוד מצוין ליד כל שאלה. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- בשאלות על עוצמות התשובות צריכות להיות מספר סופי או מתוך האפשרויות $\{\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph_0}, 2^{\aleph}\}$.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. [8 נק' לסעיף] הוכיחו או הפריכו־ לכל p,q פסוקים לוגים מתקיים (הסימון $\equiv$ בשאלה זאת מציין שקילות לוגית):

(א) $[(p \to q) \to (q \to p)] \equiv [p \vee (\neg q)]$

(ב) $[p \leftrightarrow q] \equiv [(\neg q) \leftrightarrow (\neg p)]$

פתרון:

מש.ב.

2. נגדיר יחס R על $\mathbb{N}$ כך: לכל $a,b \in \mathbb{N}$

$$aRb \iff [(a|b) \wedge (\exists m \in \mathbb{N} : \, b|a^m)]$$

כאשר $a|b$ פירושו a מחלק את b.

(א) [6 נק'] הוכיחו כי R יחס סדר.

פתרון:

רפלקסיביות: יהא x טבעי אזי $x|x$ וגם קיים $m=1$ כך ש $x|x^1$ ולכן xRx.

אנטי סימטריות : יהיו x,y טבעיים כך ש xRy וגם yRx. בפרט $x|y$ וגם $y|x$ ולכן $x=y$.

טרנזיטיביות: יהיו x,y,z טבעיים כך ש xRy וגם yRz אז $(x|y) \wedge (\exists m \in \mathbb{N} : \, y|x^m)$ וגם $(y|z) \wedge (\exists t \in \mathbb{N} : \, z|y^t)$ ולכן $x|z$ (מטרנזיטיביות של "מחלק את"). בנוסף $z|y^t$ וגם $y^t|\left(x^m\right)^t$ ולכן $z|x^{mt}$. מכאן ש xRz.

(ב) [5 נק' לסעיף] עבור הקבוצות הבאות מצאו $\inf, \sup$ במידה וקיימים. במידה שלא קיימים $\inf, \sup$ הוכיחו זאת.

i. $B = \{2^n : \, n \in \mathbb{N}\}$

פתרון:

טענה: $\inf(B) = 2$. הוכחה: לכל n טבעי $(2|2^n) \wedge (\exists m = n : 2^n|2^m)$ ולכן $2R2^n$. כלומר 2 קטן שווה מכל איברי B. בנוסף הוא הכי גדול עם תכונה זאת כי אם x קטן שווה מכל איברי B בפרט $xR2$.

טענה: $\sup$ לא קיים. הוכחה: נניח בשלילה כי $x = \sup B$ אזי בפרט לכל n טבעי מתקיים כי $2^n|x$ אבל עבור $x<n$ זה לא יתקיים. סתירה.

ii. $B = \{2n : \, n \in \mathbb{N}\}$

פתרון:

טענה: $\inf$ לא קיים. הוכחה: נניח בשלילה כי $x = \inf B$ אזי בפרט $xR2$ וגם $xR6$. מכך ש $xR2$ נקבל כי $x|2$ ולכן $x \in \{1,2\}$. מכך ש $xR6$ נקבל כי קיים mטבעי כך ש $6|x^m$ ובפרט $3|x^m$ ולכן $3|x$, זה לא מתקיים עבור $x \in \{1,2\}$. סתירה.

טענה: $\sup$ לא קיים. הוכחה: נניח בשלילה כי $x = \sup B$ אזי בפרט לכל n טבעי מתקיים כי $2n|x$ אבל עבור $x<n$ זה לא יתקיים. סתירה.

iii. $B = \left\{2 \cdot 3^3 \cdot 4^3, 2^2 \cdot 3 \cdot 4^2, 2^3 \cdot 3^2 \cdot 4\right\}$

פתרון: $B = \left\{2 \cdot 3^3 \cdot 4^3, 2^2 \cdot 3 \cdot 4^2, 2^3 \cdot 3^2 \cdot 4\right\} = \left\{2^7 \cdot 3^3, 2^6 \cdot 3, 2^5 \cdot 3^2\right\}$

טענה: $\inf(B) = 2^5 \cdot 3$ הוכחה: מתקיים כי $2^5 \cdot 3$ מחלק כל אחד מאיברי $\left\{2^7 \cdot 3^3, 2^6 \cdot 3, 2^5 \cdot 3^2\right\}$. ובנוסף קיים $m=3$ כך ש $\left(2^5 \cdot 3\right)^m$ מתחלק ע"י כל איבר ב $\left\{2^7 \cdot 3^3, 2^6 \cdot 3, 2^5 \cdot 3^2\right\}$ ולכן $2^5 \cdot 3$ חסם מלרע של B. נראה שהוא הכי גדול אם תכונה זאת: אם x חסם מלרע של B אזי בפרט קיים m טבעי כך ש $2^6 \cdot 3|x^m$ וגם $x|2^6 \cdot 3$ ולכן $2^6 \cdot 3|x^m|2^{6m} \cdot 3^m$ ובפרט x מהצורה $x = 2^s 3^t$ עבור s,t טבעיים כל שהם. כיוון ש $x|2^6 \cdot 3$ אזי $t=1$ וכיוון ש $x|2^5 \cdot 3^2$ אזי $s \le 5$ ולכן $x|2^5 \cdot 3$ בנוסף קיים $m'=5$ כך ש $x^{m'} = 2^{5s}3^{5t}$ ולכן $2^5 \cdot 3|x^{m'}$ ולכן $xR2^5 \cdot 3$. באופן דומה $\sup B = 2^7 \cdot 3^3$

3.

(א) [4 נק'] צטטו את משפט לחיצת הידיים.

פתרון:

יהא $G=(V,E)$ גרף פשוט, סופי, לא מכוון אזי $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$.

(ב) [6 נק'] יהא $T=(V,E)$ עץ מסדר סופי עם $2\leq|V|$ קודקודים. הוכיחו כי קיים קודוקד מדרגה 1.

פתרון:

כיוון שעץ הוא גרף קשיר אין קודקוד מדרגה 0. נניח בשלילה כי כל קודקוד $v\in V$ מקיים $2\leq\deg(v)$ (בפרט $3\leq|V|$) אזי לפי משפט לחיצת הידיים

$$2\left|E\right|=\sum_{v\in V}\deg(v)\geq\sum_{v\in V}2=2\left|V\right|$$

כלומר $|V|\leq|E|$ואז לפי משפט קיים מעגל ב T בסתירה לכך ש T עץ.

(ג) [8 נק'] יהא $T=(V,E)$ עץ מסדר סופי עם $2\leq|V|$ קודקודים. הוכיחו כי קימיים שני קודקודים שונים בעלי דרגה 1 (הדרכה אפשרית: באינדוקציה).

פתרון:

עבור $|V|=2$ נקבל עץ $T=(V,E)$ כאשר $V=\{v_1,v_2\}$ ו $E=\{\{v_1,v_2\}\}$ כלומר v_2 —— v_1 וקודקודים אלו בעלי דרגה 1.

כעת נניח נכונות עבור עצים עם n קודקודים ונוכיח עבור עצים עם $n+1$ קודקודים. יהא $T=(V,E)$ עץ עם $|V|=n+1$. לפי סעיף קודם קיים $v\in V$ מדרגה 1. נסמן את הקשת $e\in E$ שמכילה את v. נגדיר $T'=(V',E')$ כאשר $V'=V\setminus\{v\},E'=E\setminus\{e\}$. טענה: T' עץ. הוכחה: בין כל שני קודקודים של V' יש מסלול בקשתות של E (כי Tעץ) ובמסלול כזה e לא משתתפת כי אחרת היינו מגיעים ל v ויוצאים ממנו מה שאומר שדרגתו גדולה שווה ל 2. ב T' אין מעגלים כי מעגל ב T' הוא גם מעגל ב T. כיוון ש T' בעל n קודקודים נשתמש בהנחת האינדוקציה שיש בו $u_1,u_2\in V'$ בעל דרגה 1. כיוון ש v לא מחובר לשניהם אז ב.ה.כ הוא לא מחובר ל u_1 ואז $v,u_1\in V$ בעל דרגה 1.

(ד) [4 נק'] תנו דוגמא לעץ $T=(V,E)$ מסדר סופי עם $3\leq|V|$ קודקודים כך שלא קימיים שלוש קודקודים שונים בעלי דרגה 1.

פתרון:

למשל v_3 —— v_2 —— v_1 .

4. בשביל לקבל תואר במדעי הגינון במכללת "עובר ושב" סטודנט צריך לקבל ציונים ב 12 קורסים. רשימת הקורסים שהסטודנט יכול לקחת מתחלקים ל 3 האשכולות הבאים:

(א) אשכול A: קורסים בתחום "גינון מודרני". אשכול זה מונה 15 קורסים.

(ב) אשכול B: קורסי בחירה ב"גינון מתקדם". אשכול זה מונה 3 קורסים.

(ג) אשכול C: קורסים בתחום "היסטורית הגינון". אשכול זה מונה 3 קורסים.

ענו על השאלות הבאות [7 נק' לסעיף]:

(א) כמה אפשריות למערכת שעות יש לסטודנט על מנת לקבל תואר.

פתרון:

זה שקול לבחור 12 קורסים מתוך ה $21=3+3+15$ האפשריים ולכן התשובה היא $\binom{21}{12}$.

(ב) כמה אפשריות למערכת שעות יש לסטודנט על מנת לקבל תואר במידה והסטודנט צריך לקחת 8 קורסים (בדיוק) באשכול A, 2 קורסים (בדיוק) באשכול B ו 2 קורסים (בדיוק) באשכול C.

פתרון:

צריך לבחור 8 קורסים מתוך 15 כפול 2 מתוך 3 כפול 2 מתוך 3. הבחירה היא ללא חשיבות לסדר וללא חזרות ולכן התשובה היא

$$\binom{15}{8}\binom{3}{2}+\binom{3}{2}=6435\cdot3\cdot3$$

(ג) בסוף שנה המכללה מחלקת לכל סטודנט שסיים את חובות התואר, טבלא מרכזת שבה כתובים כמה קורסים הסטודנט לקח מכל אשכול. למשל, הטבלאות

$$\begin{array}{c|c} A & 11 \\ B & 1 \\ C & 0 \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c|c} A & 6 \\ B & 3 \\ C & 3 \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c|c} A & 8 \\ B & 1 \\ C & 3 \end{array}$$

הן מספר דוגמאות. כמה טבלאות שונות כאלו יש?

פתרון:

נסמן x_1 מספר הקורסים שסטונט לוקח מאשכול A, x_2 מאשכול B ו x_3 מאשכול C. השאלה שקולה לכמה פתרונות מהשלמים יש למשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

עם התנאים $0 \le x_1 \le 15, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 3$. בלי חסמים מלמעלה על x_i מספר הפתרונות הוא $\binom{12+3-1}{3-1} = 91$. נגדיר A_i קבוצת הפתרונות בהם x_i לא מקיים את החסם מלמעלה שלו. נשים לב כי $A_1 = \emptyset$ כי x_1 לא יכול להיות גדול מ 15 (כי $x_1 + x_2 + x_3 = 12$) נרצה לחשב

$$\left|\bigcap_{i=1}^{3} A_i^c\right| = \left|\bigcap_{i=2}^{3} A_i^c\right| = \left|\left(\bigcup_{i=2}^{3} A_i\right)^c\right| = 91 - \left|\bigcup_{i=2}^{3} A_i\right|$$

כיוון ש

$$\left|\bigcup_{i=2}^{3} A_i\right| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| = \binom{8+3-1}{3-1} + \binom{8+3-1}{3-1} - \binom{4+3-1}{3-1} = 45 + 45 - 15 = 75$$

כיוון שמספר הפתרונות ל $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ עם תנאים $0 \le x_1, 4 \le x_2, 0 \le x_3$ הוא מספר הפתרונות (ע"י החלפת משתנים) למשוואה $y_1 + y_2 + y_3 = 8$ כאשר $0 \le y_i$ שהוא $\binom{8+3-1}{3-1} = 45$. ובאופן דומה החישובים הנוספים. לכן התשובה הסופית היא $91 - 75 = 16$.

5. [8 נק' לכל סעיף] תהא $X = \{1, \dots, n\}$. נגדיר יחס $\sim$ על $P(X) \times P(X)$ כך: לכל $(A_1, A_2), (B_1, B_2) \in P(X) \times P(X)$

$$(A_1, A_2) \sim (B_1, B_2) \iff A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2$$

(א) הוכיחו כי $\sim$ יחס שקילות.

פתרון:

- רפלקסיביות: לכל $(A_1, A_2) \in P(X) \times P(X)$ מתקיים כי $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2$ ולכן $(A_1, A_2) \sim (A_1, A_2)$.
- סימטריות: נניח $(A_1, A_2) \sim (B_1, B_2)$ אזי $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2$ ולכן $B_1 \cap B_2 = A_1 \cap A_2$ ומכאן ש $(B_1, B_2) \sim (A_1, A_2)$.
- טרנזיטיביות: נניח $(A_1, A_2) \sim (B_1, B_2)$ וגם $(B_1, B_2) \sim (C_1, C_2)$ ולכן $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2$ וגם $B_1 \cap B_2 = C_1 \cap C_2$ ומהחיבור של שניהם נקבל כי $A_1 \cap A_2 = C_1 \cap C_2$ ולכן $(A_1, A_2) \sim (C_1, C_2)$.

(ב) מצאו את גודל קבוצת המנה $^{P(X)\times P(X)}/_{\sim}$.

פתרון:

טענה: $^{P(X)\times P(X)}/_{\sim} = \{[(A,A)]_\sim \mid A \subseteq X\}$

הוכחה: $(\supseteq)$ ברור. $(\subseteq)$ יהא $[(A_1,A_2)]_\sim$ מחלקת שקילות אזי נגדיר $A = A_1 \cap A_2$ ויתקיים $A_1 \cap A_2 = A \cap A$ ולכן $(A_1,A_2) \sim (A,A)$ ולכן $[(A_1,A_2)]_\sim = [(A,A)]_\sim$.

בנוסף, לכל $A \neq A' \subseteq X$ מתקיים כי $[(A,A)]_\sim \neq [(A',A')]_\sim$ כי $A \cap A = A \neq A' = A' \cap A'$.

לכן

$$\left|{}^{P(X)\times P(X)}/\sim\right| = |\{[(A,A)]_\sim \mid A \subseteq X\}| = |P(X)| = 2^{|X|} = 2^n$$

(ג) יהא $(A_1,A_2) \in P(X) \times P(X)$. נסמן $|A_1 \cap A_2| = m$ מצאו את גודל מחלקת השקילות $[(A_1,A_2)]_\sim$.

פתרון:

לפי הגדרה

$$[(A_1,A_2)]_\sim = \{(B_1,B_2) \in P(X) \times P(X) \mid A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2\}$$

עבור $(B_1,B_2) \in [(A_1,A_2)]_\sim$ מתקיים כי $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 \subseteq B_1, B_2$. כלומר B_1, B_2 מכילות את $A_1 \cap A_2$ והחיתוך $B_1 \cap B_2 = A_1 \cap A_2$. לכן יצירת כל הקבוצות $(B_1,B_2) \in [(A_1,A_2)]_\sim$ יכולות להתבצע כך:

- נתחיל עם שני עותקים של $A_1 \cap A_2$ שנסמנם B_1, B_2.
- כל איבר $x \in X \setminus (A_1 \cap A_2)$ נוסיף אותו ל B_1 או ל B_2 או לאף אחד.

עבור כל בחירה לעיל נקבל זוג (B_1,B_2) שמתייחס ל $(A_1, \cap A_2)$ ואילו כל הזוגות. לכן מספר האיברים ב $[(A_1,A_2)]_\sim$ הוא $3^{|X \setminus (A_1 \cap A_2)|} = 3^{n-m}$.

קל לראות שכל B_1, B_2 שיוצרו בתהליך לעיל יקימו כי $(B_1,B_2) \in [(A_1,A_2)]_\sim$. מצד שני בהינתן $(B_1,B_2) \in [(A_1,A_2)]_\sim$ נוכל ליצור אותם ע"י התהליך לעיל ע"י קביעת שכל $x \in B_1 \setminus (A_1 \cap A_2)$ יתווספו לעותק הראשון של $A_1 \cap A_2$ וכל $x \in B_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$ יתווספו לעותק השני של $A_1 \cap A_2$.

6. [8 נק' לכל סעיף] עבור $A = \{1,2,3,4\}$, מצאו את עוצמת הקבוצות הבאות:

(א) S_1 - קבוצת הפונקציות $f : A \to \mathbb{N}$ החח"ע.

פתרון:

כיוון ש $S_1 \subseteq \mathbb{N}^A$ נקבל כי $|S_1| \leq \aleph_0^4 = \aleph_0$. מצד שני נוכל להגדיר $F : \mathbb{N} \to S_1$ פונקציה ע"י מיפוי של n טבעי לפונקציה $\begin{matrix} 1 \mapsto n \\ 2 \mapsto n+1 \\ 3 \mapsto n+2 \\ 4 \mapsto n+4 \end{matrix}$. כיוון שזוהי פונקציה חח"ע אזי היא שייכת ל S_1 (לפי סעיף 1). בנוסף F חח"ע כי אם $F(n_1) = F(n_2)$ בפרט $n_1 = F(n_1)(1) = F(n_2)(1) = n_2$. ולכן $|S_1| \geq \aleph_0$ ולפי ק.ש.ב יש שיוויון.

(ב) S_2 - קבוצת הפונקציות $f : A \to \mathbb{N}$ שאינן חח"ע.

פתרון:

כיוון ש $S_2 \subseteq \mathbb{N}^A$ נקבל כי $|S_2| \leq \aleph_0^4 = \aleph_0$. מצד שני נוכל להגדיר $F : \mathbb{N} \to S_2$ פונקציה ע"י מיפוי של n טבעי לפונקציה הקבועה $\begin{matrix} 1 \mapsto n \\ 2 \mapsto n \\ 3 \mapsto n \\ 4 \mapsto n \end{matrix}$. כיוון שזוהי פונקציה לא חח"ע אזי היא שייכת ל S_2 (לפי סעיף 1). בנוסף F חח"ע כי אם $F(n_1) = F(n_2)$ בפרט $n_1 = F(n_1)(1) = F(n_2)(1) = n_2$. ולכן $|S_2| \geq \aleph_0$ ולפי ק.ש.ב יש שיוויון.

בהצלחה! ☺