

אנליזה 1 למורים - פתרון תרגיל 5

חשבו את הגבולות של הסדרת הבאות באמצעות מבחן המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} \quad .1$$

פתרון

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(n+1)}{n \cdot 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(n+1)}{n \cdot 2 \cdot 2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0 \quad \text{ולכן לפי מבחן המנה:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n \cdot n^2} \quad .2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1} \cdot (n+1)^2}}{\frac{n!}{2^n \cdot n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^n (n+1)!}{n! \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^n \cdot n! \cdot (n+1)}{n! \cdot 2 \cdot 2^n \cdot (n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right)} = 0$$

ולכן לפי מבחן המנה: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^n \cdot n^2} = 0$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{3^{4n}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{3^{4n+4}}}{\frac{2^{n^2}}{3^{4n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{4n} \cdot 2^{(n+1)^2}}{3^{4n+4} \cdot 2^{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{4n} \cdot 2^{n^2+2n+1}}{3^{4n} \cdot 3^4 \cdot 2^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2+2n+1}}{3^4 \cdot 2^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2} \cdot 2^{2n+1}}{3^4 \cdot 2^{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1}}{3^4} = \infty \end{aligned}$$

ולכן לפי מבחן המנה: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{3^{4n}} = \infty$