

מבחן מועד א' – מבוא לאלגברה לינארית 1 למורים – 88-613 – 01/02/22

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 30 נק', ענו על כל השאלות.

1. הם שלושה מספרים מרוכבים שונים המייצגים את הנקודות  $A, B, C$  בהתאמה במישור גאוס. נתון כי  $|z_A| = |z_B| = |z_C| = \sqrt{65}$ , הנקודה  $A$  נמצאת ברביע הראשון, וכן  $z_A, z_C$  מקיימים את המשוואה  $(8 - i)z = (8 + i)\bar{z}$

א. מצאו את  $z_A, z_C$

נתון כי שתי הנקודות  $z_A, z_C$  מקיימות את המשוואה

$$(8 - i)z = (8 + i)\bar{z}$$

נכפול את שני האגפים ב  $(8 + i)$

$$65z = (8 + i)^2\bar{z}$$

נכפול את שני האגפים ב  $z$

$$65z^2 = (8 + i)^2|z|^2$$

עבור  $z = z_A, z_C$  מתקיים כי  $|z|^2 = 65$  ולכן סה"כ

$$z^2 = (8 + i)^2$$

ולכן

$$z = \pm(8 + i)$$

כיוון ש  $A$  ברביע הראשון מתקיים כי

$$z_A = 8 + i$$

$$z_C = -8 - i$$

נתון בנוסף כי  $AB = BC$

ב. מצאו את שתי האפשרויות ל  $z_B$

$$z_B = a + bi$$

נתון כי

$$|z_B - z_A| = |z_B - z_C|$$

לכן

$$|z_B - z_A|^2 = |z_B - z_C|^2$$

$$(a - 8)^2 + (b - 1)^2 = (a + 8)^2 + (b + 1)^2$$

$$a^2 - 16a + 64 + b^2 - 2b + 1 = a^2 + 16a + 64 + b^2 + 2b + 1$$

$$-32a = 4b$$

$$-8a = b$$

כמו כן ידוע כי  $|z_B| = 65$  ולכן  $a^2 + b^2 = 65$

$$a^2 + 64a^2 = 65$$

$$a^2 = 1$$

$$a = \pm 1$$

$$b = -8a$$

ולכן שתי האפשרויות הן

$$z_B = \pm(1 - 8i)$$

הערה: ניתן היה להגיע לכאן באופן גאומטרי.  $A, C$  נמצאות על אותו קוטר של המעגל ברדיוס  $\sqrt{65}$  סביב ראשית הצירים.

כיוון  $B$  על המעגל, זווית מרכזית הנשענת על הקוטר היא ישרה, וכיוון ש  $AB = BC$  נוצר משולש ישר זווית ושווה שוקיים, וחוצה הזווית שלו הוא הרדיוס שמאונך לקוטר.

נתון בנוסף כי  $B$  נמצאת ברביע השני

ג.  $a_n$  היא סדרה הנדסית בה  $a_1 = z_A$  וכן  $a_2 = z_B$ .

נתון כי  $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 0$ , הוכיחו כי  $m$  מתחלק ב-4 ללא שארית

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה  $a_n = a_1 q^{n-1}$  עבור  $q$  קבוע, ומתקיים כי  $a_1 + a_2 + \dots + a_m = a_1 \cdot \frac{1-q^m}{1-q}$ .

כיוון ש  $B$  ברביע השני, מתקיים כי

$$z_B = -1 + 8i$$

נמצא את מנת הסדרה ההנדסית

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{-1 + 8i}{8 + i} = \frac{(-1 + 8i)(8 - i)}{65} = \frac{-8 + i + 64i + 8}{65} = i$$

אכן  $1 - i^m = 0$  אם ורק אם  $m$  מתחלק ב-4 ללא שארית.

2. יהיו  $a, t \in \mathbb{R}$  פרמטרים, ונביט במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + z = -a^2 \\ x + (a - t)y + (1 + a)z = 0 \\ tx + 2tz = t^2 - ta^2 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטרים האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -a^2 \\ 1 & a-t & 1+a & 0 \\ t & 0 & 2t & t^2 - ta^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - tR_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & a-t & a & a^2 \\ 0 & 0 & t & t^2 \end{pmatrix}$$

אם  $t \neq 0$  וכן  $a \neq t$  יש פתרון יחיד.

אם  $t = 0$  יש אינסוף פתרונות.

אם  $t \neq 0$  וכן  $a = t$  נקבל כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a & a^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ושוב נקבל אינסוף פתרונות.

ב. עבור  $t = 1, a = 1$ , מצאו את הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y = t, z = 1$$

$$x = 2$$

$$(2, t, 1) = (2, 0, 1) + t(0, 1, 0)$$

ג. מצאו ערכים של  $a, t$  עבורם  $(1, 1, -1)$  הוא פתרון של המערכת

נציב את

$$x = y = 1, z = -1$$

במערכת המשוואות ונקבל כי  $a = t = 0$

3. נביט במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיסים ומימדים לשלושת מרחבי המטריצה  $C(A), R(A), N(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$R(A) = \text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$$

$$C(A) = \text{span}\{(1, 4, 7), (2, 5, 8)\}$$

עבור  $N(A)$  נציב  $z = t$  ונקבל את הפתרון הכללי

$$x = t, y = -2t, z = t$$

$$(t, -2t, t) = t(1, -2, 1)$$

$$N(A) = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$$

והמימדים הם

$$\dim R(A) = \dim C(A) = 2$$

$$\dim N(A) = 1$$

ב. מצאו בסיס ל  $C(A) \cap R(A)$

נעבור לצורה אלגברית

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & & x \\ 0 & 1 & & y \\ -1 & 2 & & z \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & & x \\ 0 & 1 & & y \\ 0 & 0 & & z + x - 2y \end{array} \right)$$

כלומר

$$R(A) = \{(x, y, z) | x - 2y + z = 0\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 4 & 5 & | & y \\ 7 & 8 & | & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & -3 & | & y - 4x \\ 0 & -6 & | & z - 7x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & -3 & | & y - 4x \\ 0 & 0 & | & z + x - 2y \end{pmatrix}$$

כלומר

$$C(A) = \{(x, y, z) | x - 2y + z = 0\}$$

$$R(A) \cap C(A) = R(A) \text{ ולכן } C(A) = R(A) \text{ רואים כי}$$

4. נביט בתתי המרחבים

$$U = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$$

$$W = \text{span}\{(1, 2, 2), (0, 2, 1), (2, 2, 3)\}$$

א. מצאו בסיסים ומימדים ל  $U, W$

עבור  $U$

$$(1 \quad 1 \quad -1)$$

$$y = t, z = s$$

$$x = -t + s$$

$$(-t + s, t, s) = t(-1, 1, 0) + s(1, 0, 1)$$

$$u = \text{span}\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

כלומר  $\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$  הוא הבסיס ל  $U$  והמימד הוא 2.

עבור  $W$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \text{span}\{(1, 2, 2), (0, 2, 1)\}$$

כלומר  $\{(1, 2, 2), (0, 2, 1)\}$  הוא הבסיס ל  $W$  והמימד הוא 2.

ב. מצאו בסיס ומימד ל  $U \cap W$

נעביר את  $W$  לצורה אלגברית

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 2 & 2 & | & y \\ 2 & 1 & | & z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 2 & | & y - 2x \\ 0 & 1 & | & z - 2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 0 & | & y + 2x - 2z \\ 0 & 1 & | & z - 2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & | & y - 2x \\ 0 & 0 & | & y + 2x - 2z \end{pmatrix}$$

$$W = \{(x, y, z) | 2x + y - 2z = 0\}$$

ולכן

$$U \cap W = \{(x, y, z) | \begin{matrix} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{matrix} \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z = t$$

$$y = 0$$

$$x = t$$

$$(t, 0, t)$$

$$U \cap W = \text{span}\{(1,0,1)\}$$

ג. מצאו את נקודת החיתוך בין הישר  $U \cap W$  שמצאתם בסעיף ב', ובין המישור  $x - y + z = 1$ .

צריך למצוא פתרון למערכת המשוואות

$$x + y - z = 0$$

$$2x + y - 2z = 0$$

$$x - y + z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

הנקודה היא

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$