

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 6: מבוא לתורת הקוונטים: מרחבי הילברט והסתברות

1. הוכיחו כי מרחב הילברט H הינו מרחב מטרי שלם (רמז: השתמשו באי שוויון קושי שזורף כדי להסיק ש $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ כאשר $d(\cdot, \cdot)$ מטריקה. בנוסף הראו כי לכל סדרת קושי $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ כך ש $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$ ישנו גבול $x \in H$ כך ש $d(x_n, x) \rightarrow 0$.)

2. הוכיחו את כלל המקבילית: לכל שני איברים x, y במרחב הילברט H מתקיים $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. מהי המשמעות הגאומטרית של כלל זה?

3. הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$, כאשר $x_n \in H, \forall n$, אזי קיים $x \in H$ כך ש $\sum_{n=1}^\infty x_n = x$. (רמז: הראו כי סדרת הסכומים $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ הינה סדרת קושי ב H .)

4. בנסוי ברנולי מתעניינים במספר ה "הצלחות" k מתוך n נסיונות כאשר "הצלחה" מתקבלת בהסתברות p , ו "כשלון" בהסתברות $q = 1 - p$.

(א) הראו כי $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ פונקצית התפלגות

(ב) חשבו את התוחלת EX והשונות $EX^2 - E^2X$

(ג) צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות $\frac{3}{4}$ ושמאלה בהסתברות $\frac{1}{4}$. מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים ימינה מנקודת המוצא?

5. הראו כי $f_X(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}$ $x > 0$ ו $r = 1, 2, 3, \dots$ פונקצית צפיפות הסתברות. חשבו את EX ו $Var(X)$.
(השתמשו בנוסחה $\int_0^\infty x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}$.)

6. למתח של אות הנקלט בגלאי יש צפיפות נורמלית $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. נגדיר משתנה אקראי חדש $Y = 4X^2$. מצאו את $f_Y(y)$.