

## פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 6: מבוא לתורת הקוונטים: מרחבי הילברט והסתברות

1. הוכיחו כי מרחב הילברט  $H$  הינו מרחב מטרי שלם (רמז: הגדירו  $d(x, y) = (x - y, x - y)^{1/2}$  והראו כי זו אכן מטריקה. השתמשו באי שוויון קושי שזורץ כדי להסיק ש  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .)

2. הוכיחו את כלל המקבילית: לכל שני איברים  $x, y$  במרחב הילברט  $H$  מתקיי-ים  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ . מהי המשמעות הגאומטרית של כלל זה?

3. הוכיחו כי אם  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ , כאשר  $x_n \in H, \forall n$ , אזי קיים  $x \in H$  כך ש  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$  (רמז: הראו כי סדרת הסכומים  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$  הינה סדרת קושי ב  $H$ .)

4. בנסוי ברנולי מתעניינים במספר ה "הצלחות"  $k$  מתוך  $n$  נסיונות כאשר "הצלחה" מתקבלת בהסתברות  $p$ , ו "כשלון" בהסתברות  $q = 1 - p$ .

(א) הראו כי  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$  פונקצית התפלגות

(ב) חשבו את התוחלת  $EX$  והשונות  $EX^2 - E^2X$

(ג) צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות  $\frac{3}{4}$  ושמאלה בהסתבר-ות  $\frac{1}{4}$ . מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים ימינה מנקודת המוצא?

5. הראו כי  $f_X(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}$   $x > 0$  ו  $r = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\lambda > 0$  פונקצית צפיפות הסתברות. חשבו את  $EX$  ו  $Var(X)$ .  
(השתמשו בנוסחה  $\int_0^{\infty} x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}$ .)

6. למתח של אות הנקלט בגלאי יש צפיפות נורמלית  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ . נגדיר משתנה אקראי חדש  $Y = 4X^2$ . מצאו את צפיפות ההסתברות של  $Y$   $h_Y(y)$