

## פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 6: מבוא לתורת הקוונטים:  
מרחב הילברט, הסתברות, פונקציה דלתא של דיראק

1. הוכיחו כי מרחב הילברט  $H$  הינו מרחב מטרי שלם עם המטריקה

$$d(x, y) = (x - y, x - y)^{1/2}$$

2. הוכיחו את כלל המקבילית: לכל שני איברים  $x, y$  במרחב הילברט  $H$  מתקיי-  
ים  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ . מהי המשמעות הגאומטרית של  
כלל זה ?

3. יהי  $H$  מרחב הילברט. הוכיחו:

- (א) אם  $\{x_n\} \subset H$  סדרת קושי, אזי קיים  $x \in H$  כך ש  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ .  
(ב) אם  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ , כאשר  $\{x_n\} \subset H$  סדרה, אזי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$   
מתכנס ב  $H$ .

4. בנסוי ברנולי מתעניינים במספר ה "הצלחות"  $k$  מתוך  $n$  נסיונות כאשר  
"הצלחה" מתקבלת בהסתברות  $p$ , ו "כשלון" בהסתברות  $q = 1 - p$ .

(א) הראו כי  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$  פונקציה התפלגות

(ב) חשבו את התוחלת  $EX$  והשונות  $EX^2 - E^2X$   $Var(X) = EX^2 - E^2X$

(ג) צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות  $\frac{3}{4}$  ושמאלה בהסתבר-  
ות  $\frac{1}{4}$ . מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים  
ימינה מנקודת המוצא ?

5. הראו כי  $f_X(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}$   $x > 0$  ו  $r = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\lambda > 0$ , פונקציה  
צפיפות הסתברות. חשבו את  $EX$  ו  $Var(X)$ .  
(השתמשו בנוסחה  $\int_0^{\infty} x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}$ .)

6. נתון משתנה אקראי  $X$  מפולג מעריכית  $X \sim \exp(\lambda)$ .

(א) מצאו את צפיפות ההסתברות  $f_X(x)$ .

(ב) חשבו את  $EX$  ו  $Var(X)$ .

(ג) נגדיר כעת משתנה אקראי חדש  $Y = e^X$ . מצאו את צפיפות ההסתברות  $g_Y(y)$ .

(ד) מהו התנאי על  $\lambda$  על מנת ש  $Var(Y) < \infty$  ?

7. הראו כי הפונקציות הבאות הינן פונקציות דלתא (בגבול  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (\text{א})$$

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\epsilon^2} \sqrt{\epsilon^2 - x^2} & |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

(רמז: השתמשו בפונקצית מבחן  $g \in C^\infty(-\infty, \infty)$  עם תומך קומפקטי על מנת להראות כי  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = g(0)$ .)