

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 6: מבוא לתורת הקוונטים:
מרחב הילברט, הסתברות, פונקצית דלתא של דיראק

1. הוכיחו כי מרחב הילברט H הינו מרחב מטרי שלם עם המטריקה

$$d(x, y) = (x - y, x - y)^{1/2}$$

2. הוכיחו את כלל המקבילית: לכל שני איברים x, y במרחב הילברט H מתקיי-
ים $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. מהי המשמעות הגאומטרית של
כלל זה ?

3. יהי H מרחב הילברט. הוכיחו:

- (א) אם $\{x_n\} \subset H$ סדרת קושי, אזי קיים $x \in H$ כך ש $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.
(ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, כאשר $\{x_n\} \subset H$ סדרה, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$
מתכנס ב H .

4. בנסוי ברנולי מתעניינים במספר ה "הצלחות" k מתוך n נסיונות כאשר
"הצלחה" מתקבלת בהסתברות p , ו "כשלון" בהסתברות $q = 1 - p$.

(א) הראו כי $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ פונקצית התפלגות

(ב) חשבו את התוחלת EX והשונות $EX^2 - E^2X$

(ג) צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות $\frac{3}{4}$ ושמאלה בהסתבר-
ות $\frac{1}{4}$. מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים
ימינה מנקודת המוצא ?

5. הראו כי $x > 0$ $f_X(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}$, $r = 1, 2, 3, \dots$ ו $\lambda > 0$, פונקצית
צפיפות הסתברות. חשבו את EX ו $Var(X)$.
(השתמשו בנוסחה $\int_0^{\infty} x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}$.)

6. נתון משתנה אקראי X מפולג מעריכית $X \sim \exp(\lambda)$.

(א) מצאו את צפיפות ההסתברות $f_X(x)$.

(ב) חשבו את EX ו $Var(X)$.

(ג) נגדיר כעת משתנה אקראי חדש $Y = e^X$. מצאו את צפיפות ההסתברות $g_Y(y)$.

(ד) מהו התנאי על λ על מנת ש $Var(Y) < \infty$?

(ה) הראו כי בגבול $\lambda \rightarrow \infty$ מתקיים $Var(X) = Var(Y)$.

7. הראו כי הפונקציות הבאות הינן פונקציות דלתא (בגבול $\epsilon \rightarrow 0$).

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (\text{א})$$

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\epsilon^2} \sqrt{\epsilon^2 - x^2} & |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

(רמז: השתמשו בפונקצית מבחן $g \in C^\infty(-\infty, \infty)$ עם תומך קומפקטי על מנת להראות כי $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = g(0)$).