סיכום מד"ר

18 בינואר 2014

מתוך הסיכום של אוהד אברבנל.

תוכן עניינים

1 מדר לינאריות מסדר I

1.1 מד"ר עם משתנים מופרדים:

$y' = f(x)g(y)$
$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + c$

1.2 מד"ר הניתנת להפרדת משתנים

מד"ר מהצורה
$M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0$
היא **מד"ר הניתנת להפרדת משתנים**.
אם $N_1(y_0) = 0$ עבור y_0 כלשהו, אזי $y(x) = y_0$ הוא פתרון של המד"ר.
אם $M_2(x_0) = 0$ עבור x_0 כלשהו, אזי $x(y) = x_0$ הוא פתרון של המד"ר (שימו לב שלפי ההגדרה המקורית זה לא פתרון שכן זו לא פונקציה הפיכה ולא ניתן לחלץ מכאן פתרון $y(x)$. אולם, הצורה סימטרית בין x ו, וניתן לכתוב ממנה משוואה עבור $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ ולהתייחס לy כמשתנה הבלתי תלוי ולx כמשתנה התלוי). אם $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$, ניתן לחלק במכפלתם ולקבל

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y = 0$$

1.3 מד"ר פתירות ע"י השוואת משתנים:

$y' = f(ax + by)$
$z = ax + by$
$\int \frac{\mathrm{d}z}{bf(z)+a} = \int 1\mathrm{d}x + c = x + c$
$y(x) = \frac{z(x)-ax}{b}$

1.4 מד"ר הומוגני מסדר 0:

אם ניתן לכתוב את המד"ר $y' = f(x, y)$בצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אז היא נקראת מד"ר הומוגנית.
מד"ר הומוגנית ניתנת לפתרון ע"י הצבה $z(x) = \frac{y}{x}$ כלומר
$y(x) = z(x) \cdot x$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{g(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + c = \ln|x| + c = \ln(c_1 x)$$

כאשר c_1 נבחר כך ש$c_1 x$ חיובי. אחרי ביצוע האינטגרציה מקבלים את $z(x)$ ומוצאים את y להיות $y(x) = z(x) \cdot x$

1.5

$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right)$

1. כאשר $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$ (כלומר הישרים נחתכים).
נשתמש בהחלפת משתנים $x = p + \alpha$ ו$y = q + \beta$.
$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_1 \\ c \end{pmatrix}$
מתקיים $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dq}{dp} = f\left(\frac{a_1 p + b_1 q}{ap + bq}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{q}{p}}{a + b\frac{q}{p}}\right)$.
נציב $z = \frac{q}{p}$ כלומר $q = zp$ לכן $\frac{dq}{dp} = \frac{dz}{dp} \cdot p + z$.

$$\int \frac{dz}{f\left(\frac{a_1 + b_1 z}{a + bz}\right) - z} = \int \frac{dp}{p} + c$$

נקבל $z(p)$ כלשהי, ואז $q = p \cdot z(p)$, נציב ונקבל:
$y - \beta = (x - \alpha) \cdot z(x - \alpha)$.

2. כאשר $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$.
נבחר $a_1 = \lambda a,\, b_1 = \lambda b$.

$$\begin{aligned} y' &= f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right) \\ y' &= f\left(\frac{\lambda ax + \lambda by + c_1}{ax + by + c}\right) \\ y' &= f\left(\frac{(ax + by)\,\lambda + c_1}{(ax + by) + c}\right) \end{aligned}$$

ואת זה אנו יודעים לפתור.

1.6 מד"ר לינאריות מסדר I:

$y' + p(x) \cdot y = q(x)$.
p, q פונק' של x בלבד.

1. אם $q(x) = 0$ המד"ר נקראת הומוגנית:
$y = c \cdot e^{-\int p(x)dx}$
2. אחרת נסמן $y = c(x)\, e^{-\int p(x)dx}$
$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[c + \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx\right]$

1.7 משוואת ברנולי:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$$

עבור $n \neq 0, 1$.
אם $n > 0$ אז $y(x) = 0$ הוא פתרון (פרטי או סינגולרי).
אם $n < 0$ אז $y(x) = 0$ לא פתרון.
כאשר $y \neq 0$ (זהותית) המשוואה שקולה למשוואה:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \cdot y^{1-n} = q(x)$$

נציב $z = y^{1-n}$.
$z' = (1-n)\, y^{-n} \cdot y' = \frac{(1-n)y'}{y^n}$.
פיתוח סופי:

$$y(x) = \left\{ e^{-\int (1-n)p(x)dx} \cdot \left[c + \int (1-n)\, q(x)\, e^{\int (1-n)p(x)dx} \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

1.8 מדר מדויקות:

$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$
נניח קיימת $u(x, y)$ המקיימת $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ ו$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ אזי המשוואה היא:

$$du = 0$$

לכן u קבועה.
התנאי:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

1.9 גורם אינטגרציה (הפיכת מד"ר לא מדויקת למדויקת)

נניח שיש לנו משוואה מהצורה:

$$P\left(x,\,y\right)dx+Q\left(x,\,y\right)dy=0$$

נכפיל את שני הצדדים ב$\mu\left(x,\,y\right)$:

$$\mu\left(x,\,y\right)P\left(x,\,y\right)+\mu\left(x,\,y\right)P\left(x,\,y\right)=0$$

נרצה למצוא את הμ המתאימה כך שהמד"ר הזו תהיה מדויקת, כלומר מקיימת:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(x,\,y\right)P\left(x,\,y\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(x,\,y\right)Q\left(x,\,y\right)\right)$$

ישנם 2 מקרים שיודעים למצוא את μ:

1. אם $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$ תלוי בx בלבד אז מתקיים $\mu=\mu\left(x\right)$

$$\mu=e^{-\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}dx}$$

2. אם הביטוי $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{P}$ תלוי בy בלבד אז מתקיים $\mu=\mu\left(y\right)$

$$\mu\left(y\right)=e^{\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{1}{P}dy}$$

1.10

מד"ר מהצורה:$y^{(n)}=f\left(x\right)$ נפתור ע"י אינטגרציה חוזרת:

$$\begin{aligned}y^{(n-1)} &= \int f\left(x\right)dx+c_1\\ y^{(n-2)} &= \int\left[\int f\left(x\right)dx\right]dx+c_1x+c_2\end{aligned}$$

וכך הלאה עד y.

1.11 הורדת סדר משתנה:

בסוג זה יש 2 מקרים:

1. y לא מופיע במשוואה. משוואה מהצורה:

$$y''=f\left(x,\,y'\right)$$

מסמנים $z=y'$.
$z'=f\left(x,\,z\right)$.
פותרים עבור $z\left(x\right)$ ומציבים $y=\int z\left(x\right)dx+c$.

2. כאשר x לא מופיע. מד"ר מהצורה:

$$y''=f\left(y,\,y'\right)$$

נגדיר $p=y^{'}$.

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$$

נציב במשוואה:

$$\frac{dp}{dy}\cdot p=f\left(y,\,p\right)$$

זו משוואה מסדר ראשון, נפתור עבור $p\left(y\right)$ ואז פותרים את המשוואה $y'=p\left(y\right)$ ע"י:

$$\int\frac{dy}{p\left(y\right)}=\int dx=x+c$$

1.12 משוואת ריקטי:

$$y'+f\left(x\right)y^{2}+g\left(x\right)y+h\left(x\right)=0$$

$$y\left(x\right)=\frac{c\cdot a\left(x\right)+b\left(x\right)}{c\cdot A\left(x\right)+B\left(x\right)}$$

1.13 משפט הקיום והיחידות עבור מערכת מד"ר מהצורה:

$$\overrightarrow{y}\,'=\overrightarrow{f}\left(x,\,\overrightarrow{y}\right)$$

תהי $\overrightarrow{f}\left(x,\,\overrightarrow{y}\right)$ פונק' וקטורית רציפה ומקיימת תנאי ליפשיץ ב$\overrightarrow{y}$ בתיבה

$$B=\left\{ \left|x-x_{0}\right|\leq a,\,\left|y_{k}-y_{k_{0}}\right|\leq b,\,k=1,\,...,\,n\right\}$$

אזי למערכת המד"ר $\overrightarrow{y}\,'=\overrightarrow{f}\left(x,\,\overrightarrow{y}\right)$ יש פתרון אחד ויחיד ברווח $\left|x-x_{0}\right|<a'$ כאשר:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{y}\left(x_{0}\right) & = & \overrightarrow{y_{0}}\\
a' & = & \min\left(a,\,\frac{b_{1}}{M_{1}},\,...,\,\frac{b_{n}}{M_{n}}\right)\end{aligned}$$

כאשר

$$M_{k}=\max_{\left(x,\,y\right)\in B}\left|f_{k}\left(x,\,\overrightarrow{y}\right)\right|$$

1.14 מד"ר סתומות מסדר I:

1. **משוואה מסדר 1 ממעלה n:**

$$\left(y'\right)^{n}+p_{1}\left(x,\,y\right)\cdot\left(y'\right)^{n-1}+...+p_{n-1}\left(x,\,y\right)y'+p_{n}\left(x,\,y\right)=0$$

לעתים ניתן לחלץ n פתרונות של $y^{'}$, כלומר לקבל:

$$\left(y'-f_{1}\left(x,\,y\right)\right)\left(y'-f_{2}\left(x,\,y\right)\right)\cdot...\cdot\left(y'-f_{n}\left(x,\,y\right)\right)=0$$

במקרה כזה יהיו n פתרונות שונים של המשוואות $y'-f_{i}\left(x,\,y\right)=0$

2. **כאשר x לא מופיע:**

$$F\left(y,\,y'\right)=0$$

נציב $p=y^{'}=\frac{dy}{dx}$.
את y לעתים אפשר לבטא באמצעות p בעזרת המשוואה $F\left(y,\,p\right)=0$ אז נקבל$y=\phi\left(p\right)$
נקבל ע"י אינטגרציה בחלקים:
$x=c+\int\frac{dy}{p}=c+\frac{y}{p}+\int\frac{y}{p^{2}}dp=c+\frac{\phi(p)}{p}+\int\frac{\phi(p)dp}{p^{2}}$
קיבלנו ביטוי של x ושל y באמצעות p.

3. **כאשר y לא מופיע:**

$$F\left(x,\,y'\right)=0$$

נניח שאנחנו יכולים לחלץ את x כלומר $x=\varphi\left(y'\right)$ נציב $y^{'}=p$ ואז $x=\varphi\left(p\right)$

$$y=c+p\cdot\varphi\left(p\right)-\int\varphi\left(p\right)dp$$

4. **מופיעים x או y אבל סתומות ביחס לx או** y:
$F\left(y,\,y'\right)=0$ או $F\left(x,\,y'\right)=0$
נגדיר שוב $y'=p$

(א) נתחיל מהמקרה

$$F\left(y,\,p\right)=0$$

נציב $y=\varphi\left(t\right)$.

$$F\left(\varphi\left(t\right),\,p\right)=0$$

מכאן נוציא את p,

$$p=\psi\left(t\right)$$

והפתרון:

$$\begin{aligned} x &= \int\frac{\varphi'\left(t\right)}{\psi\left(t\right)}dt+c\\ y &= \varphi\left(t\right)\end{aligned}$$

(ב) כנ"ל אם

$$F\left(x,\,y'\right)=0$$

נציב $p=y^{'}$, $x=\varphi\left(t\right)$ אזי $F\left(\varphi\left(t\right),\,p\right)=0$ נקבל

$$p=\psi\left(t\right)$$

והפתרון הוא:

$$\begin{aligned} x &= \varphi\left(t\right)\\ y &= c+\int\psi\left(t\right)\varphi'\left(t\right)dt\end{aligned}$$

1.15 משוואת לגראנז':

$$\begin{aligned} y &= \varphi\left(y'\right)\cdot x+\psi\left(y'\right)\\ \varphi\left(y'\right) &\neq y'\end{aligned}$$

קיבלנו מד"ר לינארית של x כפונק' של p שאנו יודעים לפתור, הפתרון:

$$\begin{aligned} x &= e^{\int\frac{\varphi'\left(p\right)}{p-\varphi\left(p\right)}dp}\cdot\left[c+\int\frac{\psi_{p}'\left(p\right)}{p-\varphi\left(p\right)}e^{-\int\frac{\varphi'\left(p\right)}{p-\varphi\left(p\right)}dp}dp\right]\\ y &= \varphi\left(p\right)x\left(p\right)+\psi\left(p\right)\end{aligned}$$

הערה: בפתרון מחלקים ב$p-\varphi\left(p\right)$, כלומר הנחנו שמתקיים $p-\varphi\left(p\right)\neq0$.אם $p_{i}-\varphi\left(p_{i}\right)=0$ שורשים של הביטוי אז $y=p_{i}x+\psi\left(p_{i}\right)$ גם פתרון.

1.16 משוואת קלרו:

$$y = y'x + \psi(y')$$

יש לנו שני פתרונות. הראשון:$y = xc + \psi(c)$ עבור c קבוע
הפתרון השני (פתרון מיוחד):

$$\begin{aligned} x &= -\psi_p'(p) \\ y &= -p\psi'(p) + \psi(p) \end{aligned}$$

2 מד"ר ליניאריות מסדר גבוה הומוגניות

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0$$

1. אם $f(x) \equiv 0$ אזי המשוואה הומוגנית.
2. אם $\forall i\ a_i(x) = c_i$ קבוע אזי המשוואה נקראת מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים.
3. מרחב הפתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר n המקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בתחום D הוא מרחב וקטורי ממימד n.

2.1 וורונסקיאן:

1. הוורונסקיאן (Wronskian) של הפונק' $y_1, ..., y_n$ הוא:

$$W(y_1, ..., y_n) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

2. אם $y_1, ..., y_n$ ת"ל אזי $W = 0$.
3. "משפט הפוך": אם $y_1, ..., y_n$ הם פתרונות של מד"ר המקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בתחום D ומתקיים $W = 0$ בנק' כלשהי $x_0 \in D$ אזי הן תלויות לינארית.

2.2 משפט ליוביל

אם $y_1(x), ..., y_n(x)$, $x \in (a, b)$ פתרונות בת"ל של המד"ר ההומוגנית

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_n(x)\, y = 0$$

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x) dx}$$

לכל $x_0 \in (a, b)$.

3 מד"ר ליניאריות מסדר גבוה לא הומוגניות

הפתרון יהיה מהצורה:

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

כאשר $y_g(x)$ הוא הפתרון הכללי של ההומוגנית המתאימה ו$y_p(x)$ הוא פתרון כלשהו של הלא ההומוגנית.

3.1 וריאציית הפרמטרים

$$y''' + a_1(x)\, y'' + a_2(x)\, y' + a_3(x)\, y = f(x)$$

פתרון להומוגני: $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$
ננחש פתרון מהצורה: $y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + c_3(x)\, y_3(x)$
פתרון:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

פורמלית - בשיטת קרמר:

$$\begin{aligned} c_i' &= \frac{\Delta_i}{\Delta} \\ c_i &= \int dx \left(\frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)} \right) \end{aligned}$$

3.2 מד"ר לינארית הומוגנית\לא הומוגנית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_n y = f(x)$$

3.2.1 הומוגני

$r^n + p_1 r^{n-1} + ... + p_n$ נקרא הפולינום האופייני של המד"ר.
קיבלנו שאם r הוא שורש של הפולינום האופייני אזי e^{rx} פותר את המד"ר.
אם יש n פתרונות ממשיים שונים $r_1, .., r_n$, אזי הפתרון הכללי למד"ר ההומוגנית הוא:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}$$

אם יש זוג פתרונות מרוכבים צמודים $r = \alpha \pm i\beta$ אזי

$$c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + \overline{c_1} e^{(\alpha-i\beta)x} \quad = \quad \widetilde{c_1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \widetilde{c_2} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

אם $r_1, ..., r_n$ הם פתרונות הפולינום ניתן לכתוב את המשוואה בצורה:
אם r שורש עם ריבוי m אז $x^\ell e^{rx}$ פתרון עבור $\ell = 0, 1, ..., m-1$ (נסו להראות באינדוקציה).
אם יש שורש מרוכב $r = \alpha + i\beta$ עם ריבוי m, אזי $x^\ell e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ או $x^\ell e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ו-$x^\ell e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ פתרונות עבור $\ell = 0, .., m-1$.
באופן כללי, אם יש לנו פתרונות $r_1, .., r_m$ בריבויים $q_1, ..., q_m$ אזי הפתרון הוא:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i - 1} c_{ij} x^j e^{r_i x}$$

כאשר c_{ij} קבועים שרירותיים.

3.2.2 לא הומוגני: שיטה למציאת y_p

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = e^{\alpha x} \cdot \begin{Bmatrix} \sin\beta x \\ \cos\beta x \end{Bmatrix} P_m(x)$$

אם $\alpha \pm i\beta$ לא שורש ננחש פתרון מהצורה:

$$Q_{m_1}(x)\, e^{\alpha x} \cos\beta x + Q_{m_2}(x)\, e^{\alpha x} \sin\beta x$$

אם $\alpha \pm i\beta$ שורשים מריבוי k (כ"א) אז ננחש פתרון:

$$x^k \left[Q_{m_1}(x)\, e^{\alpha x} \cos\beta x + Q_{m_2}(x)\, e^{\alpha x} \sin\beta x \right]$$

3.2.3 כלל

בגלל הלינאריות של הפתרונות, אם יש לנו את המשוואה:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+...+p_ny=f\left(x\right)+g\left(x\right)$$

אז נוכל לפתור עבור $f\left(x\right)$ ו$g\left(x\right)$ בנפרד ולסכם את הפתרונות.

3.3 משוואת אוילר

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_ny=\begin{cases}0\\f\left(x\right)\end{cases}$$

3.3.1 הומוגני

כאשר $a_1,\ ...,\ a_n=\mathrm{const}\in\mathbb{R}$.

נציב: $y=x^r$ (אם מסתכלים על $x<0$ אז נציב $y=\left(-x\right)^r$).

נקבל משוואה אינדיציאלית. נפתור אותה ונמצא את הrים המתאימים.

אם כל השורשים שונים נקבל שהפתרון הוא

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_ix^{r_i}$$

עבור ℓ שורשים חוזרים עם ריבוי m_j (עבור שורש r_j) נקבל את הפתרון:

$$y=\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{m_j}c_{ij}\left(\ln x\right)^{i-1}x^{r_j}$$

עבור שורשים מרוכבים שונים $r=\alpha\pm i\beta$:

$$y=c_1x^\alpha\cos\left(\ln\beta x\right)+c_2x^\alpha\sin\left(\ln\beta x\right)$$

עבור שורשים מרוכבים חוזרים

$$y=\sum_{k=1}^{m}\left[c_{1k}x^\alpha\left(\ln x\right)^{k-1}\cos\left(\ln\beta x\right)+c_{2k}x^\alpha\left(\ln x\right)^{k-1}\sin\left(\ln\beta x\right)\right]$$

3.3.2 מקרה לא הומוגני - כללים:

אם יש משוואה מהצורה:

$$a_0x^ny^{(n)}+...+a_ny=P_\ell\left(\ln x\right)x^\alpha\sin\left(\beta\ln x\right)$$

או מהצורה

$$a_0x^ny^{(n)}+...+a_ny=P_\ell\left(\ln x\right)x^\alpha\cos\left(\beta\ln x\right)$$

כאשר $P_\ell\left(\ln x\right)$ פולינום מדרגה ℓ של $\ln x$.

אם α שורש בריבוי m נציב (m יכול להיות 0):

$$y=\left(\ln x\right)^mx^\alpha\left[Q_\ell\left(\ln x\right)\sin\left(\beta\ln x\right)+S_l\left(\ln x\right)\cos\left(\beta\ln x\right)\right]$$

כאשר Q_ℓ, S_l פולינומים מדרגה ℓ עם מקדמים לא ידועים, ונמצא את המקדמים.

4 סיווג נק' סינגולריות

$$\begin{aligned} a_0(x)\,y''+a_1(x)\,y''+a_2(x)\,y &= 0 \\ y''+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y''+\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y &= 0 \end{aligned}$$

אם בx_0 יש נקודת סינגולריות, אזי יש לנו בעיה!

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x\to x_0}\left((x-x_0)\cdot\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right) \\ L_2 &= \lim_{x\to x_0}\left((x-x_0)^2\,\frac{a_2(x)}{a_0(x)}\right) \end{aligned}$$

אז בקרבת x_0 נקבל:

$$(x-x_0)^2\,y''+(L_1+o(1))\,(x-x_0)\,y'+(L_2+o(1))\,y=0$$

וזה פתרון בסביבת

$$(x-x_0)^r$$

5 טור פרוביניוס

$$y=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}$$

אם קיימים הגבולות L_1, L_2 אז הנק' x_0 נקראת סינגולרית־רגולרית.
מציבים פתרון בצורת טור פרוביניוס ופותרים עבור r והמקדמים.
(אם זה בסביבת x_0 ולא 0 נציב טור סביב x_0).

5.1 הערה:

אם $r_1-r_2\in\mathbb{Z}$ אז:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{r_1}\sum a_kx^k \\ y_2 &= by_1(x)\cdot\ln x+x^{r_2}\sum b_kx^k \end{aligned}$$

כאשר $r_1\geq r_2$.

6 משוואת בסל

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-m^2\right)y=0$$

כאשר נניח ב.ה.כ $m\geq 0$.
$r=\pm m$

1. אם $r_1-r_2=2m\notin\mathbb{Z}$:
אז לפי פרוביניוס

$$y=c_1x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_2x^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{n(n-2m)}$$

2. אם $r_1 - r_2 = 2m \in \mathbb{Z}$:
הפתרונות תלויים וניתן להשתמש בשיטה של טורי פרוביניוס. לחילופין ניתן להשתמש בפונקציות בסל מהסוג השני:

$$Y_m(x) = \frac{J_m(x)\cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)}$$

שהן צירוף לינארי של $J_m(x)$ ו$J_{-m}(x)$. כאשר m שלם $J_{-m}(x) = -J_m(x)$, אבל ניתן להשמש בגבול

$$Y_m(x) = \lim_{\alpha \to m} \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

7 מערכות משוואות - לינאריות מסדר 1, הומוגניות, עם מקדמים קבועים

מערכת המשוואות היא:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נניח $\overrightarrow{v_i}$ ו"ע של המטריצה M עם ע"ע λ_i אזי $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{v_i} e^{\lambda_i x}$ פותר את המשוואה:

$$\overrightarrow{y}\,' = \lambda_i \overrightarrow{v_i} e^{\lambda_i x}$$

8 מערכות מד"ר מסדר ראשון לינאריות עם מקדמים קבועים לא הומוגניות

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נניח M ניתנת ללכסון, כלומר קיימת P כך ש$P^{-1}MP = D$ אלכסונית.
נגדיר

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y} &= P \cdot \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{z} &= P^{-1}\overrightarrow{y} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{z}' = D\overrightarrow{z} + P^{-1}\overrightarrow{g}(x)$$

8.1 פתרון מערכת לינארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים באמצעות אקספוננט של מטריצה

$$\vec{y}\,' = M\vec{y} + \vec{g}$$

$$\vec{y} = \exp(Mx)\left[\int \exp(-Mu)\vec{g}\mathrm{d}u + \vec{c}\right] = \int \exp\left[M\left(x-u\right)\right]\vec{g}\mathrm{d}u + \exp(Mx)\vec{c}$$

9 שיטות לפתרון מערכות:

9.1 שיטת ההצבה

$$\begin{aligned} y_1' &= g\left(y_1,\, y_2\right) \\ y_2' &= h\left(y_1,\, y_2\right) \\ \frac{dy_1}{dy_2} &= \frac{y_1'}{y_2'} = \frac{g\left(y_1,\, y_2\right)}{h\left(y_1,\, y_2\right)} \end{aligned}$$

9.2 שיטת החילוץ

10 פתרון מד"ר באמצעות התמרות לפלס\פורייה

התמרת לפלס:

$$g\left(s\right) = L\left(f\left(t\right)\right) = \int_0^\infty e^{-st} f\left(t\right) dt$$

התמרה הפוכה:

$$f\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{c+ist} g\left(s\right) ds$$

כאשר c נמצאת מימין לכל קוטב של $g\left(s\right)$.

$$L\left(f'\left(t\right)\right) = -f\left(0\right) + sL\left(f\left(t\right)\right)$$

11 בעיות שפה

לבעיות שפה לא בהכרח יש פתרון, ואם יש הוא לא בהכרח יחיד, לעומת בעיות קושי.

12 בעיית שטורם ליוביל

המד"ר:

$$-\left(P\left(x\right)y'\right)' + Q\left(x\right)y = f\left(x\right)$$

אם $P,\, Q$ רציפות וגזירות בקטע $\left(a,\, b\right)$ וכן $P\left(x\right) > 0$ בקטע, המד"ר נקרא משוואת שטורם ליוביל.

הערה

בהינתן המד"ר

$$R\left(x\right)y'' + S\left(x\right)y' + T\left(x\right)y = f\left(x\right)$$

ניתן להפוך אותו לצורה של שטורם ליוביל ע"י כפל בגורם אינטגרציה: $\mu = c \cdot e^{\int \frac{S(x)-R'(x)}{R(x)} dx}$