

סיכום מד"ר

20 בינואר 2014

מתוך הסיכום של אוהד אברבנל.

תוכן עניינים

| | | | |
|----|-------|-------|---|
| 2 | | 1 | מד"ר לינאריות מסדר I |
| 2 | | 1.1 | מד"ר עם משתנים מופרדים: |
| 2 | | 1.2 | מד"ר הניתנת להפרדת משתנים |
| 2 | | 1.3 | מד"ר פתירות ע"י השוואת משתנים: |
| 2 | | 1.4 | מד"ר הומוגני מסדר 0: |
| 2 | | 1.5 | |
| 3 | | 1.6 | מד"ר לינאריות מסדר I: |
| 3 | | 1.7 | משוואת ברנולי: |
| 3 | | 1.8 | מד"ר מדויקות: |
| 4 | | 1.9 | גורם אינטגרציה (הפיכת מד"ר לא מדויקת למדויקת) |
| 4 | | 1.10 | |
| 4 | | 1.11 | הורדת סדר משתנה: |
| 5 | | 1.12 | משוואת ריקטי: |
| 5 | | 1.13 | משפט הקיום והיחידות עבור מערכת מד"ר מהצורה: |
| 5 | | 1.14 | מד"ר סתומות מסדר I: |
| 6 | | 1.15 | משוואת לגראנז': |
| 7 | | 1.16 | משוואת קלרו: |
| 7 | | 2 | מד"ר לינאריות מסדר גבוה הומוגניות |
| 7 | | 2.1 | וורונסקיאן: |
| 7 | | 2.2 | משפט ליוביל |
| 7 | | 3 | מד"ר לינאריות מסדר גבוה לא הומוגניות |
| 8 | | 3.1 | וריאציית הפרמטרים |
| 8 | | 3.2 | מד"ר לינארית הומוגנית\לא הומוגנית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים |
| 8 | | 3.2.1 | הומוגני |
| 8 | | 3.2.2 | לא הומוגני: שיטה למציאת y_p |
| 9 | | 3.2.3 | כלל |
| 9 | | 3.3 | משוואת אוילר |
| 9 | | 3.3.1 | הומוגני |
| 9 | | 3.3.2 | מקרה לא הומוגני - כללים: |
| 10 | | 4 | סיווג נק' סינגולריות |
| 10 | | 5 | טור פרוביניוס |
| 10 | | 5.1 | הערה: |
| 10 | | 6 | משוואת בסל |
| 11 | | 7 | מערכות משוואות - לינאריות מסדר 1, הומוגניות, עם מקדמים קבועים |
| 11 | | 8 | מערכות מד"ר מסדר ראשון לינאריות עם מקדמים קבועים לא הומוגניות |
| 12 | | 8.1 | פתרון מערכת לינארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים באמצעות אקספוננט של מטריצה |
| 12 | | 9 | שיטות לפתרון מערכות: |
| 12 | | 9.1 | שיטת ההצבה |
| 12 | | 9.2 | שיטת החילוף |
| 12 | | 10 | פתרון מד"ר באמצעות התמרות לפלס\פורייה |
| 12 | | 11 | בעיות שפה |

1 מדור לינאריות מסדר I

1.1 מד"ר עם משתנים מופרדים:

$$y' = f(x)g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c$$

1.2 מד"ר הניתנת להפרדת משתנים

מד"ר מהצורה

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

היא מד"ר הניתנת להפרדת משתנים.

אם $N_1(y_0) = 0$ עבור y_0 כלשהו, אזי $y(x) = y_0$ הוא פתרון של המד"ר.
 אם $M_2(x_0) = 0$ עבור x_0 כלשהו, אזי $x(y) = x_0$ הוא פתרון של המד"ר (שימו לב שלפי ההגדרה המקורית זה לא פתרון שכן זו לא פונקציה הפיכה ולא ניתן לחלץ מכאן פתרון $y(x)$). אולם, הצורה סימטרית בין x ו y , וניתן לכתוב ממנה משוואה עבור $\frac{dx}{dy}$ ולהתייחס ל y כמשתנה הבלתי תלוי ול x כמשתנה התלוי. אם $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$, ניתן לחלק במכפלתם ולקבל

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

1.3 מד"ר פתירות ע"י השוואת משתנים:

$$y' = f(ax + by)$$

$$z = ax + by$$

$$\int \frac{dz}{bf(z)+a} = \int 1dx + c = x + c$$

$$y(x) = \frac{z(x)-ax}{b}$$

1.4 מד"ר הומוגני מסדר 0:

אם ניתן לכתוב את המד"ר $y' = f(x, y)$ בצורה $y' = g(\frac{y}{x})$ אז היא נקראת מד"ר הומוגנית.
 מד"ר הומוגנית ניתנת לפתרון ע"י הצבה $z(x) = \frac{y}{x}$ כלומר

$$y(x) = z(x) \cdot x$$

$$\int \frac{dz}{g(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + c = \ln|x| + c = \ln(c_1x)$$

כאשר c_1 נבחר כך c_1x חיובי. אחרי ביצוע האינטגרציה מקבלים את $z(x)$ ומוצאים את y להיות $y(x) = z(x) \cdot x$

1.5

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$$

1. כאשר $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$ (כלומר הישרים נחתכים).

נשתמש בהחלפת משתנים $x = p + \alpha$ ו $y = q + \beta$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_1 \\ c \end{pmatrix}$$

מתקיים $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dq}{dp} = f\left(\frac{a_1p+b_1q}{ap+bq}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{q}{p}}{a+b\frac{q}{p}}\right)$

נציב $z = \frac{q}{p}$ כלומר $q = zp$ לכן $\frac{dq}{dp} = \frac{dz}{dp} \cdot p + z$

$$\int \frac{dz}{f\left(\frac{a_1+b_1z}{a+bz}\right) - z} = \int \frac{dp}{p} + c$$

נקבל $z(p)$ כלשהי, ואז $q = p \cdot z(p)$, נציב ונקבל:

$$y - \beta = (x - \alpha) \cdot z(x - \alpha)$$

2. כאשר $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$
 נבחר $a_1 = \lambda a, b_1 = \lambda b$.

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$$

$$y' = f\left(\frac{\lambda ax + \lambda by + c_1}{ax + by + c}\right)$$

$$y' = f\left(\frac{(ax + by)\lambda + c_1}{(ax + by) + c}\right)$$

ואת זה אנו יודעים לפתור.

1.6 מד"ר לינאריות מסדר I:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

p, q פונק' של x בלבד.

1. אם $q(x) = 0$ המד"ר נקראת הומוגנית:
 $y = c \cdot e^{-\int p(x)dx}$

2. אחרת נסמן $y = c(x) e^{-\int p(x)dx}$
 $y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[c + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right]$

1.7 משוואת ברנולי:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$$

עבור $n \neq 0, 1$
 אם $n > 0$ אז $y(x) = 0$ הוא פתרון (פרטי או סינגולרי).
 אם $n < 0$ אז $y(x) = 0$ לא פתרון.
 כאשר $y \neq 0$ (זהותית) המשוואה שקולה למשוואה:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x) \cdot y^{1-n} = q(x)$$

נציב $z = y^{1-n}$
 $z' = (1-n)y^{-n} \cdot y' = \frac{(1-n)y'}{y^n}$
 פיתוח סופי:

$$y(x) = \left\{ e^{-\int (1-n)p(x)dx} \cdot \left[c + \int (1-n)q(x) e^{\int (1-n)p(x)dx} dx \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

1.8 מדר מדויקות:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

נניח קיימת $u(x, y)$ המקיימת $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ ו $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ אזי המשוואה היא:

$$du = 0$$

לכן u קבועה.
התנאי:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

1.9 גורם אינטגרציה (הפיכת מד"ר לא מדויקת למדויקת)

נניח שיש לנו משוואה מהצורה:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

נכפיל את שני הצדדים ב $\mu(x, y)$:

$$\mu(x, y) P(x, y) + \mu(x, y) Q(x, y) = 0$$

נרצה למצוא את μ המתאימה כך שהמד"ר הוא תהיה מדויקת, כלומר מקיימת:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(x, y) P(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, y) Q(x, y))$$

ישנם 2 מקרים שיודעים למצוא את μ :

1. אם $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$ תלוי ב x בלבד אז מתקיים $\mu = \mu(x)$

$$\mu = e^{-\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} dx}$$

2. אם הביטוי $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot \frac{1}{P}$ תלוי ב y בלבד אז מתקיים $\mu = \mu(y)$

$$\mu(y) = e^{\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \frac{1}{P} dy}$$

1.10

מד"ר מהצורה: $y^{(n)} = f(x)$ נפתור ע"י אינטגרציה חוזרת:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + c_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + c_1 x + c_2$$

וכך הלאה עד y .

1.11 הורדת סדר משתנה:

בסוג זה יש 2 מקרים:

1. y לא מופיע במשוואה. משוואה מהצורה:

$$y'' = f(x, y')$$

מסמנים $z = y'$

$$z' = f(x, z)$$

פותרים עבור $z(x)$ ומציבים $z(x) + c$

2. כאשר x לא מופיע. מד"ר מהצורה:

$$y'' = f(y, y')$$

נגדיר $p = y'$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

נציב במשוואה:

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y, p)$$

זו משוואה מסדר ראשון, נפתור עבור $p(y)$ ואז פותרים את המשוואה $y' = p(y)$ ע"י:

$$\int \frac{dy}{p(y)} = \int dx = x + c$$

1.12 משוואות ריקטי:

$$y' + f(x)y^2 + g(x)y + h(x) = 0$$

$$y(x) = \frac{c \cdot a(x) + b(x)}{c \cdot A(x) + B(x)}$$

1.13 משפט הקיום והיחידות עבור מערכת מד"ר מהצורה:

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

תהי פונק' וקטורית רציפה ומקיימת תנאי ליפשיץ ב \vec{y} בתיבה

$$B = \{|x - x_0| \leq a, |y_k - y_{k_0}| \leq b, k = 1, \dots, n\}$$

אזי למערכת המד"ר $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ יש פתרון אחד ויחיד ברוח a' כאשר $|x - x_0| < a'$:

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

$$a' = \min\left(a, \frac{b_1}{M_1}, \dots, \frac{b_n}{M_n}\right)$$

כאשר

$$M_k = \max_{(x, y) \in B} |f_k(x, \vec{y})|$$

1.14 מד"ר סתומות מסדר I:

1. משוואה מסדר 1 ממעלה n:

$$(y')^n + p_1(x, y) \cdot (y')^{n-1} + \dots + p_{n-1}(x, y) y' + p_n(x, y) = 0$$

לעתים ניתן לחלץ n פתרונות של y' , כלומר לקבל:

$$(y' - f_1(x, y))(y' - f_2(x, y)) \cdot \dots \cdot (y' - f_n(x, y)) = 0$$

במקרה כזה יהיו n פתרונות שונים של המשוואות $y' - f_i(x, y) = 0$

2. כאשר x לא מופיע:

$$F(y, y') = 0$$

נציב $p = y' = \frac{dy}{dx}$

את y לעתים אפשר לבטא באמצעות p בעזרת המשוואה $F(y, p) = 0$ אז נקבל $y = \phi(p)$
נקבל ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$x = c + \int \frac{dy}{p} = c + \frac{y}{p} + \int \frac{y}{p^2} dp = c + \frac{\phi(p)}{p} + \int \frac{\phi(p) dp}{p^2}$$

קיבלנו ביטוי של x ושל y באמצעות p.

3. כאשר y לא מופיע:

$$F(x, y') = 0$$

נניח שאנחנו יכולים לחלץ את x כלומר $x = \varphi(y')$ נציב $y' = p$ ואז $x = \varphi(p)$

$$y = c + p \cdot \varphi(p) - \int \varphi(p) dp$$

4. מופיעים x או y אבל סתומות ביחס ל x או y :

$$F(x, y') = 0 \text{ או } F(y, y') = 0$$

נגדיר שוב $y' = p$

(א) נתחיל מהמקרה

$$F(y, p) = 0$$

נציב $y = \varphi(t)$.

$$F(\varphi(t), p) = 0$$

מכאן נוציא את p ,

$$p = \psi(t)$$

והפתרון:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + c$$

$$y = \varphi(t)$$

(ב) כנ"ל אם

$$F(x, y') = 0$$

נציב $y' = p$, $x = \varphi(t)$ אזי $F(\varphi(t), p) = 0$ נקבל

$$p = \psi(t)$$

והפתרון הוא:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = c + \int \psi(t) \varphi'(t) dt$$

1.15 משוואות לגראנז':

$$y = \varphi(y') \cdot x + \psi(y')$$

$$\varphi(y') \neq y'$$

קיבלנו מד"ר לינארית של x כפונק' של p שאנו יודעים לפתור, הפתרון:

$$x = e^{\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp} \cdot \left[c + \int \frac{\psi'_p(p)}{p - \varphi(p)} e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp} dp \right]$$

$$y = \varphi(p) x(p) + \psi(p)$$

הערה: בפתרון מחלקים ב $p - \varphi(p)$, כלומר הנחנו שמתקיים $p - \varphi(p) \neq 0$. אם $p - \varphi(p) = 0$ שורשים של הביטוי אז $y = p_i x + \psi(p_i)$ גם פתרון.

1.16 משוואת קלרו:

$$y = y'x + \psi(y')$$

יש לנו שני פתרונות. הראשון: $y = xc + \psi(c)$ עבור c קבוע
הפתרון השני (פתרון מיוחד):

$$\begin{aligned}x &= -\psi'_p(p) \\ y &= -p\psi'(p) + \psi(p)\end{aligned}$$

2 מד"ר לינאריות מסדר גבוה הומוגניות

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

1. אם $f(x) \equiv 0$ אזי המשוואה הומוגנית.
2. אם $\forall i \ a_i(x) = c_i$ קבוע אזי המשוואה נקראת מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים.
3. מרחב הפתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר n המקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בתחום D הוא מרחב וקטורי ממימד n .

2.1 וורונסקיאן:

1. הוורונסקיאן (Wronskian) של הפונק' y_1, \dots, y_n הוא:

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

2. אם y_1, \dots, y_n ת"ל אזי $W = 0$.
3. "משפט הפוך": אם y_1, \dots, y_n הם פתרונות של מד"ר המקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בתחום D ומתקיים $W = 0$ בנק' כלשהי $x_0 \in D$ אזי הן תלויות לינארית.

2.2 משפט ליוביל

אם $x \in (a, b)$, $y_1(x), \dots, y_n(x)$ פתרונות בת"ל של המד"ר ההומוגנית

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(x) dx}$$

לכל $x_0 \in (a, b)$

3 מד"ר לינאריות מסדר גבוה לא הומוגניות

הפתרון יהיה מהצורה:

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

כאשר $y_g(x)$ הוא הפתרון הכללי של ההומוגנית המתאימה ו $y_p(x)$ הוא פתרון כלשהו של הלא הומוגנית.

3.1 וריאציית הפרמטרים

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x)$$

פתרון להומוגני: $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$
 ננחש פתרון מהצורה: $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$
 פתרון:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

פורמלית - בשיטת קרמר:

$$c_i' = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$c_i = \int dx \left(\frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)} \right)$$

3.2 מד"ר לינארית הומוגנית \ לא הומוגנית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \dots + p_ny = f(x)$$

3.2.1 הומוגני

נקרא הפולינום האופייני של המד"ר. $r^n + p_1r^{n-1} + \dots + p_n$
 קיבלנו שאם r הוא שורש של הפולינום האופייני אזי e^{rx} פותר את המד"ר.
 אם יש n פתרונות ממשיים שונים r_1, \dots, r_n , אזי הפתרון הכללי למד"ר הומוגנית הוא:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i e^{r_i x}$$

אם יש זוג פתרונות מרוכבים צמודים $r = \alpha \pm i\beta$ אזי

$$c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + \bar{c}_1 e^{(\alpha-i\beta)x} = \tilde{c}_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \tilde{c}_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

אם r_1, \dots, r_n הם פתרונות הפולינום ניתן לכתוב את המשוואה בצורה:
 אם r שורש עם ריבוי m אז $x^\ell e^{rx}$ פתרון עבור $\ell = 0, 1, \dots, m-1$ (נסו להראות באינדוקציה).
 אם יש שורש מרוכב $r = \alpha + i\beta$ עם ריבוי m , אזי $x^\ell e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ או $x^\ell e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ו $x^\ell e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ פתרונות עבור $\ell = 0, \dots, m-1$

באופן כללי, אם יש לנו פתרונות r_1, \dots, r_m בריבויים q_1, \dots, q_m אזי הפתרון הוא:

$$y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{q_i-1} c_{ij} x^j e^{r_i x}$$

כאשר c_{ij} קבועים שרירותיים.

3.2.2 לא הומוגני: שיטה למציאת y_p

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_ny = e^{\alpha x} \cdot \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases} P_m(x)$$

אם $\alpha \pm i\beta$ לא שורש פתרון מהצורה:

$$Q_{m_1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{m_2}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

אם $\alpha \pm i\beta$ שורשים מריבוי k (כ"א) אז נחש פתרון:

$$x^k [Q_{m_1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{m_2}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x]$$

3.2.3 כלל

בגלל הלינאריות של הפתרונות, אם יש לנו את המשוואה:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x) + g(x)$$

אז נוכל לפתור עבור $f(x)$ ו $g(x)$ בנפרד ולסכם את הפתרונות.

3.3 משוואת אוילר

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \begin{cases} 0 \\ f(x) \end{cases}$$

3.3.1 הומוגני

כאשר $a_1, \dots, a_n = \text{const} \in \mathbb{R}$.

נציב: $y = x^r$ (אם מסתכלים על $x < 0$ אז נציב $y = (-x)^r$).
נקבל משוואה אינדיציאלית. נפתור אותה ונמצא את הריים המתאימים.
אם כל השורשים שונים נקבל שהפתרון הוא

$$y = \sum_{i=1}^n c_i x^{r_i}$$

עבור ℓ שורשים חוזרים עם ריבוי m_j (עבור שורש r_j) נקבל את הפתרון:

$$y = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{m_j} c_{ij} (\ln x)^{i-1} x^{r_j}$$

עבור שורשים מרוכבים שונים $r = \alpha \pm i\beta$

$$y = c_1 x^\alpha \cos(\ln \beta x) + c_2 x^\alpha \sin(\ln \beta x)$$

עבור שורשים מרוכבים חוזרים

$$y = \sum_{k=1}^m \left[c_{1k} x^\alpha (\ln x)^{k-1} \cos(\ln \beta x) + c_{2k} x^\alpha (\ln x)^{k-1} \sin(\ln \beta x) \right]$$

3.3.2 מקרה לא הומוגני - כללים:

אם יש משוואה מהצורה:

$$a_0 x^n y^{(n)} + \dots + a_n y = P_\ell(\ln x) x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

או מהצורה

$$a_0 x^n y^{(n)} + \dots + a_n y = P_\ell(\ln x) x^\alpha \cos(\beta \ln x)$$

כאשר $P_\ell(\ln x)$ פולינום מדרגה ℓ של $\ln x$.

עבור α שורש בריבוי m של המשוואה האינדיציאלית נציב (m יכול להיות 0):

$$y = (\ln x)^m x^\alpha [Q_\ell(\ln x) \sin(\beta \ln x) + S_\ell(\ln x) \cos(\beta \ln x)]$$

כאשר S_ℓ, Q_ℓ פולינומים מדרגה ℓ עם מקדמים לא ידועים, ונמצא את המקדמים.

4 סיווג נק' סינגולריות

$$\begin{aligned} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y &= 0 \\ y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y &= 0 \end{aligned}$$

אם ב- x_0 יש נקודת סינגולריות, אזי יש לנו בעיה!

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left((x - x_0) \cdot \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \right) \\ L_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left((x - x_0)^2 \frac{a_2(x)}{a_0(x)} \right) \end{aligned}$$

אז בקרבת x_0 נקבל:

$$(x - x_0)^2 y'' + (L_1 + o(1))(x - x_0)y' + (L_2 + o(1))y = 0$$

זוה פתרון בסביבת

$$(x - x_0)^r$$

5 טור פרוביניוס

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

אם קיימים הגבולות L_1, L_2 אז הנק' x_0 נקראת סינגולרית-רגולרית. מציבים פתרון בצורת טור פרוביניוס ופותרים עבור r והמקדמים. (אם זה בסביבת x_0 ולא 0 נציב טור סביב x_0).

5.1 הערה:

אם $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ אז:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{r_1} \sum a_k x^k \\ y_2 &= b y_1(x) \cdot \ln x + x^{r_2} \sum b_k x^k \end{aligned}$$

כאשר $r_1 \geq r_2$.

6 משוואת בסל

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0$$

כאשר נניח ב.ה.כ. $m \geq 0$.
 $r = \pm m$

1. אם $r_1 - r_2 = 2m \notin \mathbb{Z}$ אז לפי פרוביניוס

$$y = c_1 x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + c_2 x^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n-2m)}$$

2. אם $r_1 - r_2 = 2m \in \mathbb{Z}$:

הפתרונות תלויים וניתן להשתמש בשיטה של טורי פרויבניוס. לחילופין ניתן להשתמש בפונקציות בסל מהסוג השני:

$$Y_m(x) = \frac{J_m(x) \cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)}$$

שהן צירוף לינארי של $J_m(x)$ ו $J_{-m}(x)$. כאשר m שלם $J_{-m}(x) = -J_m(x)$, אבל ניתן להשמש בגבול

$$Y_m(x) = \lim_{\alpha \rightarrow m} \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

7 מערכות משוואות - לינאריות מסדר 1, הומוגניות, עם מקדמים קבועים

מערכת המשוואות היא:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נניח \vec{v}_i ו"ע של המטריצה M עם ע"ע λ_i אזי $\vec{y} = \vec{v}_i e^{\lambda_i x}$ פותר את המשוואה:

$$\vec{y}' = \lambda_i \vec{v}_i e^{\lambda_i x}$$

8 מערכות מד"ר מסדר ראשון לינאריות עם מקדמים קבועים לא הומוגניות

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נניח M ניתנת ללכסון, כלומר קיימת P כך $P^{-1}MP = D$ אלכסונית.
נגדיר

$$\begin{aligned} \vec{y} &= P \cdot \vec{z} \\ \vec{z} &= P^{-1} \vec{y} \end{aligned}$$

$$\vec{z}' = D \vec{z} + P^{-1} \vec{g}(x)$$

8.1 פתרון מערכת לינארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים באמצעות אקספוננט של מטריצה

$$\vec{y}' = M\vec{y} + \vec{g}$$

$$\vec{y} = \exp(Mx) \left[\int \exp(-Mu)\vec{g}du + \vec{c} \right] = \int \exp [M(x-u)] \vec{g}du + \exp(Mx)\vec{c}$$

9 שיטות לפתרון מערכות:

9.1 שיטת ההצבה

$$\begin{aligned} y_1' &= g(y_1, y_2) \\ y_2' &= h(y_1, y_2) \\ \frac{dy_1}{dy_2} &= \frac{y_1'}{y_2'} = \frac{g(y_1, y_2)}{h(y_1, y_2)} \end{aligned}$$

9.2 שיטת החילוף

10 פתרון מד"ר באמצעות התמרות לפלס \ פורייה

התמרת לפלס:

$$g(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

התמרה הפוכה:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{c+ist} g(s) ds$$

כאשר c נמצאת מימין לכל קוטב של $g(s)$.

$$L(f'(t)) = -f(0) + sL(f(t))$$

11 בעיות שפה

לבעיות שפה לא בהכרח יש פתרון, ואם יש הוא לא בהכרח יחיד, לעומת בעיות קושי.

12 בעיית שטורם ליוביל

המד"ר:

$$-(P(x)y')' + Q(x)y = f(x)$$

אם P, Q רציפות וגזירות בקטע (a, b) וכן $P(x) > 0$ בקטע, המד"ר נקרא משוואת שטורם ליוביל.

הערה

בהינתן המד"ר

$$R(x)y'' + S(x)y' + T(x)y = f(x)$$

ניתן להפוך אותו לצורה של שטורם ליוביל ע"י כפל בגורם אינטגרציה: $\mu = c \cdot e^{\int \frac{S(x)-R'(x)}{R(x)} dx}$