אביב תשע"ג

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 6: מבוא לתורת הקוונטים: מרחב הילברט, הסתברות, פונקצית דלתא של דיראק

1. הוכיחו כי מרחב הילברט H הינו מרחב מטרי שלם עם המטריקה
$$d(x,y)=(x-y,x-y)^{1/2}$$

2. הוכיחו את כלל המקבילית: לכל שני איברים x,y במרחב הילברט H מתקיים $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$. מהי המשמעות הגאומטרית של כלל זה ?

3. יהי H מרחב הילברט. הוכיחו:
   (א) אם $\{x_n\}\subset H$ סדרת קושי, אזי קיים $x\in H$ כך ש $\|x_n\|\to\|x\|$.
   (ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$, כאשר $\{x_n\}\subset H$ סדרה, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ מתכנס ב H.

4. בנסוי ברנולי מתעניינים במספר ה "הצלחות" k מתוך n נסיונות כאשר "הצלחה" מתקבלת בהסתברות p, ו "כשלון" בהסתברות $q=1-p$.
   (א) הראו כי $P(X=k)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}p^k(1-p)^{n-k}$ פונקצית התפלגות
   (ב) חשבו את התוחלת EX והשונות $Var(X)=EX^2-E^2X$
   (ג) צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות $\frac{3}{4}$ ושמאלה בהסתברות $\frac{1}{4}$. מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים ימינה מנקודת המוצא ?

5. הראו כי $x>0$ $f_X(x)=\frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda x}$, $r=1,2,3....$ ו $\lambda>0$, פונקצית צפיפות הסתברות. חשבו את EX ו $Var(X)$.
(השתמשו בנוסחה $\int_0^{\infty}x^ke^{-ax}dx=\frac{k!}{a^{k+1}}$).

6. נתון משתנה אקראי X מפולג מעריכית $X\sim\exp(\lambda)$.
   (א) מצאו את צפיפות ההסתברות $f_X(x)$.
   (ב) חשבו את EX ו $Var(X)$.

(ג) נגדיר כעת משתנה אקראי חדש $Y = e^X$. מצאו את צפיפות ההסתב-
רות $g_Y(y)$.

(ד) מהו התנאי על λ על מנת ש $Var(Y) < \infty$?

(ה) הראו כי בגבול $\lambda \to \infty$ מתקיים $Var(Y) = Var(X)$.

7. הראו כי הפונקציות הבאות הינן פונקציות דלתא (בגבול $\epsilon \to 0$).

(א) $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2} \;, -\infty \leq x \leq \infty$

(ב) $f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\epsilon^2}\sqrt{\epsilon^2 - x^2} & |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(רמז : השתמשו בפונקצית מבחן $g \in C^\infty(-\infty, \infty)$ עם תומך קומפקטי על מנת להראות כי $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0)$).