אביב תשע"ד

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 6: מבוא לתורת הקוונטים:
מרחב הילברט, הסתברות, פונקציית דלתא של דיראק

1. הוכיחו כי מרחב הילברט H הינו מרחב מטרי שלם עם המטריקה
$d(x,y) = (x-y, x-y)^{1/2}$

2. הוכיחו את כלל המקבילית: לכל שני איברים x, y במרחב הילברט H מתקיים $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. מהי המשמעות הגאומטרית של כלל זה ?

3. הוכיחו כי מרחב הסדרות עם סכום ריבועים סופי
$$\ell^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) | \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$
הינו מרחב שלם.

4. בנסוי ברנולי מתעניינים במספר ה "הצלחות" k מתוך n נסיונות כאשר "הצלחה" מתקבלת בהסתברות p, ו "כשלון" בהסתברות $q = 1 - p$.
   (א) הראו כי $P(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$ פונקצית התפלגות
   (ב) חשבו את התוחלת EX והשונות $Var(X) = EX^2 - E^2X$
   (ג) צפרדע קופצת מטר בכל פעם, ימינה בהסתברות $\frac{3}{4}$ ושמאלה בהסתברות $\frac{1}{4}$. מה ההסתברות שלאחר 10 קפיצות תימצא הצפרדע שני מטרים ימינה מנקודת המוצא ?

5. הראו כי $x > 0$ $f_X(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\lambda x}$, $r = 1, 2, 3....$ ו $\lambda > 0$, פונקצית צפיפות הסתברות. חשבו את EX ו $Var(X)$.
(השתמשו בנוסחה $\int_0^\infty x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}$).

6. נתון משתנה אקראי X מפולג מעריכית $X \sim \exp(\lambda)$.
   (א) מצאו את צפיפות ההסתברות $f_X(x)$.
   (ב) חשבו את EX ו $Var(X)$.

(ג) נגדיר כעת משתנה אקראי חדש $Y = e^X$. מצאו את צפיפות ההסתב-
רות $g_Y(y)$.

(ד) מהו התנאי על λ על מנת ש $Var(Y) < \infty$?

(ה) הראו כי בגבול $\lambda \to \infty$ מתקיים $Var(Y) = Var(X)$.

7. הראו כי הפונקציות הבאות הינן פונקציות דלתא (בגבול $\epsilon \to 0$).

(א) $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2} \ , -\infty \leq x \leq \infty$

(ב) $f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\epsilon^2}\sqrt{\epsilon^2 - x^2} & |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(רמז : השתמשו בפונקצית מבחן $g \in C^\infty(-\infty, \infty)$ עם תומך קומפקטי על מנת להראות כי $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0)$).