תרגול 2 אנליזה מודרנית

7 בנובמבר 2017

הגדרה: סיגמא אלגברה לבג הינה אוסף כל הקבוצות המדידות ב $P(\mathbb{R})$.
אם נסמן ב m את מידת לבג שהיא בעצם הצימצום של המידה החיצונית m^*, את סיגמא אלגברה לבג ב S אזי השלשה $(\mathbb{R}, S, m)$ נקראית מרחב מידת לבג.
מרחב זה מקיים את התכונות הבסיסיות הבאות:

1. אם $\{A_n\} \in S$ אזי $\cap A_n \in S$ וגם $\cup A_n \in S$.
2. אם $A \in S$ אזי $A^c \in S$.
3. אם $\{A_n\}$ סדרה של קבוצות זרות ב S אזי

$$m(\cup A_n) = \sum_n m(A_n).$$

טענה: יהי $(\mathbb{R}, S, m)$ מרחב מידת לבג. הוכיחו כי $A \in S$ אממ לכל n קיימות $F_n \subset \mathbb{R}$ סגורות ו $E_n \subset \mathbb{R}$ פתוחות כך ש

$$F_n \subset A \subset E_n$$

ו $m(E_n \backslash F_n) < \frac{1}{n}$.
פתרון: $\Leftarrow$: נניח כי $A \in S$, נוכיח את הטענה ל A חסומה. ראינו כבר בתרגיל בית כי במצב זה קיימות E_n פתוחות כך ש

$$m^*(A) > m(E_n) - \frac{1}{2n}$$

מכיוון ש A מדידה נובע כי $m(A) > m(E_n) - \frac{1}{2n}$. כעת נניח כי A איננה חסומה. אז נגדיר $A_k = A \cap [k, k+1)$ ונשים לב כי $A = \cup A_k$. עבור A_k נמצא קבוצה $E_{n,k}$ פתוחה כך ש

$$m(A_k) > m(E_{n,k}) - \frac{2^{-|k|}}{4n}$$

ומכאן שאם נגדיר את $E_n = \cup_k E_{n,k}$ נקבל כי

$$m(E_n \backslash A) < \frac{1}{2n}$$

עכשיו נמצא את F_n המקיימות את הטענה. עבור A כללית, נסתכל על A^c ונמצא עבורו G_n פתוחות כך

$$m\left(G_n \backslash A^c\right) < \frac{1}{2n}$$

עכשיו נשים לב כי אם נגדיר את $F_n = G_n^c$ נקבל כי

$$m\left(A \backslash F_n\right) = m\left(G_n \backslash A^c\right) < \frac{1}{2n}$$

מכאן נובע כי

$$m\left(E_n \backslash F_n\right) < \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$: נגדיר את $B = \cap_n E_n$, אזי $A \subset B$ וגם $m\left(B \backslash A\right) = 0$. מכאן ש $C = B \backslash A$ מדידה ולכן $A = B \backslash C$ מדידה.

תרגיל: הראו כי כל קבוצה פתוחה הינה קבוצה מדידה.

פתרון: ראינו כי כל קבוצה פתוחה ניתן להציג כאיחוד בן מנייה של קטעים פתוחים וגם כי איחוד בן מנייה של קבוצות מדידות הינה קבוצה מדידה.

תרגיל: תהי f_n סדרת פונקציות ממשיות רציפות על $[0,1]$. הוכיחו כי הקבוצה

$$\left\{x \in [0,1] : f_n\left(x\right) \to 0\right\}$$

מדידה לבג.

פתרון: נגדיר עבור m את סדרת הקבוצות הבאה

$$E_n^m := \left\{x : \left|f_n\left(x\right)\right| < \frac{1}{m}\right\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x \in A = \left\{x : f_n\left(x\right) \to 0\right\} \Leftrightarrow \forall m \qquad \exists n_0 \qquad \forall n > n_0 \qquad x \in E_n^m$$

$$x \in A \Leftrightarrow x \in \cap_m \cap_{n_0 \geq 1}\left(\cap_{n \geq n_0} E_n^m\right)$$

מכיוון שהפונקציות f_n רציפות הקבוצות E_n^m הינן פתוחות. מכאן שהקבוצה A מדידה.

הגדרה: נסמן $C_0=\left[0,1\right]$, ולכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את C_{n+1} להיות C_n לאחר שמורידים מכל קטע בו את השליש האמצעי (הפתוח) ע"י הנוסחה $C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$. קבוצת קנטור מוגדרת כחיתוך של כל ה- C_n: $C:=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$. (כל C_n הוא איחוד של 2^n קטעים סגורים שאורכם $\frac{1}{3^n}$.

[לצייר ציור!]

1. <u>תכונות:</u>

א. C קומפקטית.

ב. יהי $x\in\left[0,1\right]$, אם נציג את x בבסיס טרנארי (3) $x=0.x_1x_2x_3...$ (כלומר $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$) אזי נקבל כי $x\in C\Leftrightarrow$ לכל $n\in\mathbb{N}$, הספרה ה-nית של x $x_n\equiv d_n\left(x\right)\equiv x$ היא 0 או 2.

ג. C אינה בת-מנייה.

ד. $m\left(C\right)=0$

ה. C לא מכילה שום קטע (בעל מידה חיובית)

ו. C אינה איחוד בן-מנייה של קטעים סגורים.

<u>הוכחה:</u>

א. מכיוון ש C_n הינה איחוד סופי של קטעים סגורים נקבל כי C_n קבוצה סגורה לכל $n\in\mathbb{N}$.
מכאן שקבוצת קנטור $C:=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$ הינה סגורה כחיתוך של קבוצות סגורות. מכיוון ש $C\subset[0,1]$ אזי היא חסומה ועפ"י היינה בורל הינה קומפקטית.

ב. נוכיח $x\in C_n\Leftrightarrow x_1,x_2,...,x_n\in\left\{0,2\right\}$ באינדוקציה:

המקרה $n=1$:

$$x\in C_1\Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\Leftrightarrow x_1=0\text{ or }x_1=2\Leftrightarrow x_1\in\left\{0,2\right\}$$

נניח את נכונות הטענה עבור n כלשהו ונוכיח את נכונותה עבור $n+1$:

$(\Rightarrow)$

$$x\in C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x\in\frac{C_n}{3}\text{ or }x\in\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow 3x\in C_n\text{ or }3x-2\in C_n$$

ע"פ הנחת האינדוקציה, $d_n(3x)\in\{0,2\}$ או $d_n(3x-2)\in\{0,2\}$. אבל - $d_n(3x-2)=d_n(3x)=d_{n+1}(x)=x_{n+1}$. מספיק לשים לב כי $C_{n+1}\subseteq C_n$ כדי לראות שהטענה נכונה.

$(\Leftarrow)$

ידוע כי $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}\in\{0,2\}$ ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה $x\in C_n$. יש להוכיח כי $x\in C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$, כלומר $3x\in C_n$ או $3x-2\in C_n$. ובכן:

אם $x_1=0$ נקבל $3x=0.x_2x_3...x_nx_{n+1}...\in C_n$,

ואם $x_1=2$ נקבל $3x-2=0.x_2x_3...x_nx_{n+1}...\in C_n$.

סיימנו את האינדוקציה. סה"כ $x\in C\Leftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}\left(x\in C_n\right)\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}\left(x_n\in\{0,2\}\right)$

מש"ל.

ג. עפ"י סעיף ב' יש התאמה בין סדרות של 0 ו 2 וקבוצת קנטור. כמו כן, יש התאמה בין סדרות של 0 ו 1 ל $\mathbb{R}$ ...

ד. לכל $N\in\mathbb{N}$, $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\subseteq C_N$ וע"פ מונוטוניות $0\le m(C)\le m(C_N)=2^N\frac{1}{3^N}$. נשאיף $N\to\infty$ לקבל את הדרוש.

ה. נניח בשלילה שקיים קטע $I\subseteq C$, עם מידה (אורך) $m(I)=\ell>0$. עפ"י המונוטוניות נקבל בסתירה ש

$$m(I)\le m(C)=0$$

ו. נניח בשלילה כי $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר I_n קטעים סגורים. אזי כבר ראינו כי $m\left(I_n\right)=0$ ולכן בהכרח $I_n=\{x_n\}$, כלומר הקטעים הסגורים הינם נקודונים. אבל עפ"י סעיף ג' C איננה בת מנייה ומכאן סתירה.