אינפי 1 - תרגיל 1

1. הוכח כי $|a|=\left|\frac{a}{2}\right|+\left|\frac{a}{2}\right|$ לכל $a\in\mathbb{R}$, לפי ההגדרה של הערך המוחלט.

פתרון: אם a שלילי, אז $\left|\frac{a}{2}\right|+\left|\frac{a}{2}\right|=-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=-a=|a|$, ואם a חיובי אז $\left|\frac{a}{2}\right|+\left|\frac{a}{2}\right|=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a=|a|$

2. הוכח כי אם $\left|x-\frac{a}{2}\right|<\frac{|a|}{2}$ אזי $|x-a|<|a|$

פתרון: $|x-a|=\left|x-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right|\le\left|x-\frac{a}{2}\right|+\left|\frac{a}{2}\right|<\left|\frac{a}{2}\right|+\left|\frac{a}{2}\right|=|a|$ (זה נכון בזכות אי שיוויון המשולש ושאלה 1)

3. הוכח את אי השיוויון $||a|-|b||\le|a-b|$

פתרון:

מכיוון ששני האגפים חיוביים, מספיק להוכיח את אי השיוויון $(||a|-|b||)^2\le(|a-b|)^2$. נפתח את שני הצדדים:

$$(||a|-|b||)^2=(|a|-|b|)^2=|a|^2-2|a||b|+|b|^2=a^2-|2ab|+b^2$$

$$(|a-b|)^2=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

לכן מספיק להוכיח את אי השיוויון $a^2-|2ab|+b^2\le a^2-2ab+b^2$. נצמצם ונכפול במינוס אחד לקבל $|2ab|\ge 2ab$ וזה נכון תמיד לפי התכונה שלמדנו בכיתה, מ.ש.ל.

4. מצא את כל ערכי x הממשיים עבורם מתקיים אי השיוויון:

א. $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)>0$ עבור $n\in\mathbb{N}$ אי-זוגי

פתרון:

המכפלה הנ"ל תהיה חיובית כאשר כל הגורמים יהיו שונים מאפס, וכמות הגורמים השליליים תהיה אפס או זוגית. עבור $x<1$ כל הגורמים שליליים, ויש מספר אי זוגי שלהם ולכן אי השיוויון אינו מתקיים. עבור $x=1$ המכפלה היא אפס ולכן אי השיוויון אינו מתקיים. עבור $1<x<2$ יש $n-1$ גורמים שליליים ולכן אי השיוויון מתקיים. באופן דומה ממשיכים.

תשובה – אי השיוויון מתקיים עבור $1<x<2$ או $3<x<4$ או... $n-1<x<n$

שימו לב: לא הוכחנו פה במדויק את הכלל עבור n כללי. השיטה לעשות את זה במדויק הייתה באמצעות אינדוקציה - תנסו את זה לבד.

ב. $\left|2x^2-5x+2\right|<\left|x+1\right|$

פתרון: נחלק לתחומים:

$x+1>0$ כאשר $x>-1$

$2x^2-5x+2>0$ פרבולה צוחקת עם שורשים 2 ו $\frac{1}{2}$, ולכן כאשר $\frac{1}{2}>x$ או $x<2$.

לכן יש שלושה תחומים:

1. $x+1>0$ וגם $2x^2-5x+2>0$ כאשר $x>2$ או $-1<x<\frac{1}{2}$

2. $x+1>0$ ו $2x^2-5x+2\le 0$ כאשר $\frac{1}{2}\le x\le 2$

3. $x+1\le 0$ ו $2x^2-5x+2\ge 0$ כאשר $x\le -1$

נפתור את אי השיוויון בתוך כל אחד מהתחומים:

1. $2x^2-5x+2<x+1$ לכן $2x^2-6x+1<0$ וזו פרבולה צוחקת עם שורשים $\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$ ולכן אי השיוויון מתקיים עבור $\frac{3+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ ובתוך התחום $\frac{1}{2}<x<\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ או $2<x<\frac{3+\sqrt{7}}{2}$

2. $-2x^2+5x-2<x+1$ ולכן $2x^2-4x+3>0$ זו פרבולה צוחקת ללא שורשים ולכן אי השיוויון מתקיים בתוך כל התחום, ולכן הפתרונות הם $\frac{1}{2}\le x\le 2$

3. $2x^2-5x+2<-x-1$ ולכן $2x^2-4x+3<0$ זו פרבולה צוחקת ללא שורשים ולכן אי השיוויון לא מתקיים כלל (כי הרי רוצים קטן מאפס, בניגוד לתחום הקודם בו רצינו גדול מאפס).

תשובה סופית: סה"כ הפתרונות הם $\frac{3-\sqrt{7}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{7}}{2}$

ג. $\left||x+1|-|x-1|\right|<1$

פתרון: שני האגפים חיוביים לכן מותר להעלות בריבוע

$(\left||x+1|-|x-1|\right|)^2<1^2$ אם"ם $(|x+1|-|x-1|)^2<1$ (כי $x^2=|x|^2$). אם"ם

$|x+1|^2+|x-1|^2-2|x+1||x-1|<1$ אם"ם $(x+1)^2+(x-1)^2-2|(x+1)(x-1)|<1$ אם"ם

$2x^2+2-2|(x+1)(x-1)|<1$ אם"ם $2x^2+1<2|(x^2-1)|$. כעת שני האגפים חיוביים, לכן נעלה

בריבוע את שניהם: $4x^4+4x^2+1<(2(x^2-1))^2=4x^4-8x^2+4$ אם"ם $12x^2<3$ אם"ם

$x^2<\frac{1}{4}$ אם"ם $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ ד

תשובה סופית: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

5. הוכח באינדוקציה:

א. $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

פתרון: עבור $n=1$ ברור. נניח נכון עבור n נוכיח שנכון עבור $n+1$.

לכן $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

אבל $1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)[n(2n+3)+(4n+6)]}{6}=\frac{(n+1)[n(2n+3)+2(2n+3)]}{6}=\frac{(n+1)[(n+2)(2n+3)]}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)[((n+1)+1)(2(n+1)+1)]}{6}$$

ב. $1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2$

פתרון: עבור $n=1$ ברור. נניח נכון עבור n נוכיח שנכון עבור $n+1$.

$1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2$ לכן $1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=(1+2+...+n)^2+(n+1)^3$

אבל $(1+2+...+n+n+1)^2=(1+2+...+n)^2+2(1+2+...+n)(n+1)+(n+1)^2$ ולפי הנחת האינדוקציה $=(1+2+...+n+n+1)^2=1^3+2^3+...+n^3+2(1+2+...+n)(n+1)+(n+1)^2$

$$=1^3+2^3+...+n^3+(n+1)[(1+2+...+n+n+1)+(1+2+...+n)]=$$

אבל לפי הנוסחא לסדרה חשבונית, זה שווה

$$=1^3+2^3+...+n^3+(n+1)[\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}]=1^3+2^3+...+n^3+(n+1)[\frac{(n+1)(n+2+n)}{2}]=$$

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)[\frac{(n+1)(2n+2)}{2}]=1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3$$