

## אלגברה מופשטת - תרגיל 2

תאריך הגשה: 17.08.2011

ההגשה היא בתרגול בלבד!

אין דחייה בהגשה!

- על התרגיל יש לרשום: שם, תעודת זהות, שם המתרגל.
- יש להגיש את התרגיל ללא ניילונים ו/או קלסרים! אלא בקובץ דפים מהודק מצד ימין!

### שאלה 1

(א) האם קיים מונומורפיזם מ-  $GL_5(\mathbb{Q})$  ל-  $(\mathbb{Q}^5, +)$ ? (כאשר  $\mathbb{Q}^5 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ).

(ב) האם קיים אפימורפיזם מ-  $(M_5(\mathbb{Q}), +)$  ל-  $(\mathbb{Q}^5, +)$ ?

### שאלה 2

בדקו אם החבורות הבאות הן ציקליות (אם הן ציקליות, מצאו לפחות יוצר אחד. אם לא, הוכיחו זאת), ומצאו כמה יוצרים יש להן אם כן:

(א)  $\Omega_{101}, \Omega_{102}$

(ב)  $\langle cis \frac{17\pi}{25} \rangle, \langle cis \pi \sqrt{3} \rangle$

(ג)  $U_{20}$

(ד)  $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$

### שאלה 3

(א) יהיו  $H, K \leq G$  תת חבורות. נגדיר את הקבוצה  $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ . הוכיחו:

$HK = KH$  אם ורק אם  $G$  היא חבורה של  $G$ .

(ב) הסיקו מסעיף א' כי אם  $N$  ת"ח נורמלית של  $G$  ו-  $H$  ת"ח של  $G$  אז  $HN$  ת"ח של  $G$ .

(ג) הוכיחו כי אם  $N_1, N_2$  תח"נ של  $G$  אז  $N_1 \cap N_2$  ו-  $N_1 N_2$  תח"נ של  $G$ .

### שאלה 4

(1) תהי  $\mathbb{Q}$  חבורת המספרים הרציונליים (עם פעולת החיבור), ותהי  $\mathbb{Z}$  (חבורת המספרים השלמים) תת חבורה שלה.

א. הוכיחו שב-  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  כל איבר הוא מסדר סופי.

ב. הראו כי התת חבורה הנוצרת ע"י המחלקות של  $\frac{1}{4}$  ו-  $\frac{1}{6}$  היא ציקלית.

מהו הסדר של תת חבורה זו?

(2) נתבונן ב-  $G = GL_2(\mathbb{Q}, \cdot)$  ובתת-החבורה  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\}$ . חשבו את  $[G : H]$ .

### שאלה 5

(א) תנו דוגמה לחבורה סופית  $G$  ותת-חבורה  $H$  המראות שההתאמה  $Hx \rightarrow xH$  אינה בהכרח מוגדרת היטב.

(ב) תנו דוגמה לחבורה (אינסופית) שיש לה תת קבוצה סגורה ביחס לפעולה, שאיננה תת חבורה.

### שאלה 6

(א) פתרו:  $28^{301}x \equiv 2004 \pmod{99}$

(ב) פתרו באמצעות משפט אוילר את המשוואה:

$$9999x = 3737373737^{9999} + 2011 \pmod{40}$$

(ג) באמצעות משפט אוילר מצאו את 2 הספרות האחרונות של המספר  $8073767^{1999} + 2011$

(ד) הוכיחו או הפריכו:  $70!+1$  מתחלק ב-71,  $116!+1$  מתחלק ב-117.

(ה) פתרו את המשוואה  $a^3xb = ab^2ab$  בחבורה  $S_3$  כאשר

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

### שאלה 7

תהי  $D_4$  החבורה הדיהדרלית ויהיו  $\sigma, \tau \in D_4$  (כאשר  $\tau$  איבר מסדר 2 – שיקוף, ו- $\sigma$  איבר מסדר 4 – סיבוב ב-90 מעלות).

נגדיר את תתי החבורות הציקליות  $H = \langle \tau \rangle$ ,  $K = \langle \sigma^2 \rangle$ .

(א) כתבו במפורש את אברי תתי החבורות  $H, K$  וחשבו את  $[D_4 : H]$ ,  $[D_4 : K]$ .

(ב) כתבו את המחלקות השמאליות של  $H, K$  ב- $D_4$ . האם הן תת חבורות נורמליות?

### שאלה 8

תארו את הקוסטים השמאליים של חבורה  $G$  לגבי ת"ח  $H$ :

א.  $G = 4\mathbb{Z}, H = 12\mathbb{Z}$

ב.  $G = \mathbb{R}^2, H = \{(t, 3t) | t \in \mathbb{R}\}$

ג.  $G = X_1 \times X_2, H = X_1 \times \{e\}$  ( $X_1, X_2$  חבורות)

ד.  $G = U_{20}, H = \langle \bar{11} \rangle$

### שאלה 9

(א) תהי  $D_4$  החבורה הדיהדרלית. חשבו את טבלת הכפל שלה.

(ב) מהו  $Z(D_4)$ ? הוכיחו. (באשר  $Z(G)$  הוא המרכז של החבורה  $G$ )

### שאלה 10

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן הומומורפיזמים ומצאו אם הן חח"ע ו/או על:

(א)  $f: (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$  המוגדרת ע"י:  $f(x) = x^5$

(ב)  $f: (\mathbb{Q}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Q}^*, \cdot)$  המוגדרת ע"י:  $f(x) = x^5$

ג)  $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow G$  באשר  $G = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  והפונקציה מוגדרת ע"י  $x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \pmod{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### שאלה 11

בתרגיל בית הקודם, בשאלה 4, הוכחתם כי  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$  חבורה. הוכיחו כי  $G \cong \mathbb{C}^*$ .

שאלת בונוס (10 נק')  
הגדרה: חבורה  $G$  היא פשוטה אם אין לה ת"ח נורמליות לא-טריוואליות.  
נתון כי  $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \dots$  חבורות פשוטות. הוכיחו כי  $G = \bigcup_n G_n$  חבורה פשוטה.

**בהצלחה!**