אינפי 4 – תרגול 8

חישוב שטח של משטח:

משפט: יהי R תחום סגור וחסום במישור xy , ותהי f פונקציה בעלת נגזורת חלקיות רציפות מסדר ראשון ב R . נסמן ב S את שטחו של חלק המשטח $z=f(x,y)$, אשר היטלו על מישור xy הוא התחום R . אז $S=\iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}dA$.

דוגמא: מצא את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2+z^2=4$ הנמצא מעל למלבן $R=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 4\}$ שבמישור xy .

פתרון: המשוואה של חלק הגליל $x^2+z^2=4$ שמעל מישור xy היא: $z=\sqrt{4-x^2}$ ולכן נקבל

$$S=\iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}dA=\iint_R \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2+0+1}dA$$

$$=\int_0^4\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dxdy=2\int_0^4\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]\Bigg|_{x=0}^1 dy=2\int_0^4\frac{\pi}{6}dy=\frac{4}{3}\pi$$

דוגמא: מצא את שטח הפנים של חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ שמתחת למישור $z=1$.

פתרון: מן המשוואות $z=x^2+y^2$ ו $z=1$ ברור שהחיתוך של המישור עם הפרבולואיד הוא מעגל, שהיטלו על מישור xy הוא המעגל $1=x^2+y^2$. ההיטל של חלק הפרבולואיד שאת שטחו אנו רוצים לחשב הוא העיגול $R=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$. מכיוון שמשוואת הפרבולואיד היא $z=x^2+y^2$ מקבלים $S=\iint_R\sqrt{4x^2+4y^2+1}dA$. את האינטגרל הזה נוח יותר לחשב במערכת קוטבית. לשם כך נחליף את x^2+y^2 ב r^2 ואת dA ב $rdrd\theta$. נציב ונקבל

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{4r^2+1}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}\left(4r^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)d\theta=\frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

שטח של משטח פרמטרי

נדון עתה בחישוב שטח S של משטח σ, הנתון ע"י ההצגה הפרמטרית : $r(u,v)=x(u,v)i+y(u,v)j+z(u,v)k$ כאשר (u,v) נעה על פני תחום R כלשהו במישור uv .

אם $\frac{\partial r}{\partial u}$ ו $\frac{\partial r}{\partial v}$ רציפות ומתקיים $\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\neq \mathbf{0}$ ב R , נאמר על r שהוא פונקציה חלקה של u ו v ועל σ שהיא משטח פרמטרי חלק(יריעה).

שטח משטח פרמטרי חלק σ נתון ע"י $S=\iint_R\left\|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right\|dA$.

דוגמא: המשטח המיוצג על ידי המשוואה $r(u,v)=u\cos vi+u\sin vj+3uk$ כאשר $0\le u\le 2, 0\le v\le 2\pi$, הוא חלק מחרוט. חשב את שטחו.

פתרון: $\frac{\partial r}{\partial u}=\cos vi+\sin vj+3k, \frac{\partial r}{\partial v}=-u\sin vi+u\cos vj$. לכן

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 3 \\ -u\sin v & u\cos v & 0\end{vmatrix}=-3u\cos vi-3u\sin vj+uk$$

לכן לפי מה שראינו –

$$S=\iint_R\left\|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right\|dA=\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{10}u\,du\,dv=2\sqrt{10}\int_0^{2\pi}dv=4\sqrt{10}\pi$$

<u>שימושים, מרכז כובד</u>

נניח ויש לנו משטח ועליו צפיפות של חומר הנתונה ע"י הפונקציה $f(x,y)$. נניח והמשטח נמצא בשדה כבידה F . בכל נקודה על המשטח מופעל כח הפורפורציוני למסה באותה הנקודה. נרצה למצוא נקודה $(\bar{x},\bar{y})$ על המשטח כזאת שניתן לראות בה את הסכום של כל הכוחות הפועלים על המשטח. לנקודה זו קוראים נקודת מרכז כובד.

משפט: יהי משטח σ הנתון ע"י פרמטריזציה על התחום R . תהי $f(x,y)$ צפיפות החומר על המשטח. נסמן ב $M=\iint_R f(x,y)dA$ את המסה הכוללת על המשטח. אזי

$$(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)dA,\frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)dA\right)$$

דוגמא: חשב את מרכז הכובד של לוח דק, בצורת משלש שקדקודיו הם $(0,0),(0,1)$ ו $(1,0)$, שפונקציית הצפיפות שלו היא $f(x,y)=xy$.

פתרון: המסה מחושבת ע"י

$$M=\iint_R f(x,y)\,dA=\iint_R xy\,dA=\int_0^1\int_0^{-x+1} xy\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{-x+1}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{2}x\right]dx=\frac{1}{24}$$

עכשיו,

$$\iint_R xf(x,y)\,dA=\iint_R x^2y\,dA=\int_0^1\int_0^{-x+1} x^2y\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{-x+1}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2\right]dx=\frac{1}{60}$$

וכן

$$\iint_R yf(x,y)\,dA=\iint_R xy^2\,dA=\int_0^1\int_0^{-x+1} xy^2\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{3}xy^3\right]_{y=0}^{-x+1}dx=\int_0^1\left[-\frac{1}{3}x^4+x^3-x^2+\frac{1}{3}x\right]dx=\frac{1}{60}$$

מכאן ש $(\overline{x},\overline{y})=\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$.