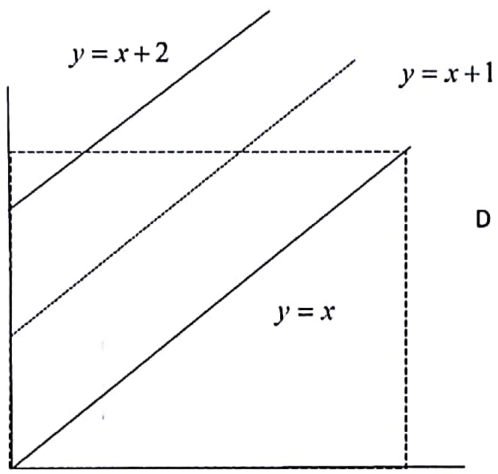
תרגיל 8 – פתרון

1. יהי $X=Y=\mathbb{R}$ ונסתכל על $\mathbb{R}^2$ ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x\ge 0 \text{ and } x\le y<x+1\\ -1 & x\ge 0 \text{ and } x+1\le y<x+2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

הראו כי $\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)\neq\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

פתרון:



נחשב :

$$h(y)=\int f(x,y)m(dx)=\begin{cases}0 & y<0\\ \int_0^y 1dm=y & 0\le y<1\\ \int_0^{y-1}-1dm+\int_{y-1}^{y}1dm=2-y & 1\le y<2\\ \int_{y-2}^{y-1}-1dm+\int_{y-1}^{y}1dm=0 & 2\le y<\infty\end{cases}$$

ולכן :

$$\int\int f(x,y)m(dx)m(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dm = \int_0^1 ym(dy) + \int_1^2 (2-y)m(dy) = 1 .$$

מצד שני,

$$g(x) = \int f(x,y)m(dy) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_x^{x+1} 1m(dy) + \int_{x+1}^{x+2} -1m(dy) = 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)m(dy)m(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dm = \int_{-\infty}^{\infty} 0dm = 0$$

ומכאן ש

$$1 = \int\int f(x,y)m(dx)m(dy) \neq \int\int f(x,y)m(dy)m(dx) = 0 .$$

על מנת להראות כי אין סתירה למשפט פוביני, נראה כי $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dm \times dm = \infty$.

נחשב את $\iint_D |f(x,y)| dm \times dm$ כאשר D_x הינו הריבוע בציור שצלעו באורך x . ברור כי אינטגרל כפול על הפונקציה הינו השטח של הריבוע D_x פחות שני המשולשים. כלומר, אם גודל הריבוע הוא x^2 אזי

$\iint_{D_x} |f(x,y)| dm \times dm = x^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2}\right) = 2x-2$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dm \times dm = \lim_{x\to\infty} \iint_{D_x} |f(x,y)| dm \times dm = \lim_{x\to\infty} 2x-2 = \infty$.

מכאן כי תנאי משפט פוביני אינם מתקיימים ולכן אין סתירה.

2. הוכיחו כי $I=\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

<u>פתרון</u> :

נחשב: $I^2=\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dydx$.

הפונקציה $f(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ הינה רציפה ולכן מדידה ביחס לסיגמא אלגברת לבג המכפלה. כמו כן היא חיובית ולכן ניתן להשתמש במשפט טונלי. לכן

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}m(dx)m(dy)=\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}m\times m(dx,dy)$$

מכיוון ש f רציפה היא אינטגרבילית רימן לפחות במובן הרחב (כלומר האינטגרל יכול להיות שווה ל ∞ . נוכל לעבור לקורדינאטות פולאריות

$$x^2+y^2=r^2$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

נקבל כי

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta=\frac{\pi}{2}$$

ומכאן ש $I=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ מדידה לבג, הוכיחו את השוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dm(x)=\int_0^{\infty}m\left(\left\{x:|f(x)|\geq t\right\}\right)dm(t).$$

<u>פתרון:</u>

לפי משפט טונלי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{|f(x)|}1dm(t)\right]dm(x)=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}I_{\{(x,t):|f(x)|\geq t\}}dm(t)\right]dm(x)\overset{Tonelli}{=}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):|f(x)|\geq t\}}dm(x)\right]dm(t)=\int_0^{\infty}m\left(\left\{x:|f(x)|\geq t\right\}\right)dm(t)$$

הסיבה שמשפט טונלי תקף היא כי מדובר במידות לבג $dm(x),dm(t)$ שהן שלמות ו- σ סופיות. בנוסף יש לבדוק כי הפונקציה $I_{\{(x,t):|f(x)|\geq t\}}$ מדידה במרחב המכפלה, וע"פ אחד מתרגילי הבית הכרחי ומספיק להוכיח כי **הקבוצה** $\left\{(x,t):|f(x)|\geq t\right\}$ מדידה "$L\otimes L$" .

(נשתמש בסימון $\otimes$ לסמן את σ -אלגברת המכפלה)

ובכן יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, ההעתקה $x\mapsto|f(x)|$ מדידה (הרכבה של רציפה ומדידה), ולכן הקבוצה $\left\{x\in\mathbb{R}:|f(x)|>\alpha\right\}=:E_\alpha\in L$. ומכאן $\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:|f(x)|>\alpha\right\}=E_\alpha\times\mathbb{R}\in L\otimes L$ מלבן מדיד (שהוא קבוצה מדידה!). קיבלנו אם כן כי ההעתקה $(x,t)\mapsto|f(x)|$ מדידה $L\otimes L$.

הפונקציה $t\mapsto t$ גם כן מדידה לבג ולכן $\left\{t\in\mathbb{R}:t>\alpha\right\}=:F_\alpha\in L$, ומכאן $\left\{(x,t):t>\alpha\right\}=\mathbb{R}\times F_\alpha\in L\otimes L$. הפרש בין פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן $(x,t)\mapsto|f(x)|-t$ מדידה. הקבוצה שלנו היא בדיוק $\left(|f|-t\right)^{-1}\left[[0,\infty)\right]$ ולכן מדידה.

4. תהי μ מידה סופית על $\mathbb{R}$, ונגדיר $\alpha(x)=\mu((-\infty,x])$. הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha(x+c)-\alpha(x)]dm(x)=c\mu(\mathbb{R}).$$

<u>פתרון:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha(x+c)-\alpha(x)]dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[\mu((-\infty,x+c])-\mu((-\infty,x])]dm(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mu((x,x+c])dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{(x,x+c]}d\mu(t)dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):x<t\le x+c\}}d\mu(t)dm(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):t>x\ge t-c\}}d\mu(t)dm(x)\overset{Tonelli}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):t>x\ge t-c\}}dm(x)d\mu(t)=c\int_{-\infty}^{\infty}d\mu(t)=c\mu(\mathbb{R})$$

תרגיל 5

נסמן ב- $\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$

תהי $\mu:=\frac{m}{2\pi}$ מידת לבג המנורמלת על $\mathbb{T}$.

נתונים:

$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה ו- $A\subseteq\mathbb{T}$ מדידה.

כך ש- $\int_{\mathbb{T}} f\,d\mu=a$,

וגם $\mu(A)=b$.

הראו כי קיים סיבוב של הקבוצה A בזווית θ, שנסמנו A_θ,

כך ש-

$$\int_{A_\theta} f\,d\mu\geq ab$$

פתרון: אם $a=\infty$ אזי אי השוויון מיידי עבור A. ($\theta=0$).

נניח כי $a<\infty$. לכן: $f\in L^1(\mathbb{T})$.

לכל $\theta\in[0,2\pi)$ נגדיר:

$$h(\theta)=\int_{\mathbb{T}} f(e^{it})\,\mathbb{1}_A(e^{i(t+\theta)})\,d\mu(t)$$

כלומר: סיבוב של A בזווית θ

זוהי אינטגרציה של f על הקבוצה המסובבת (כלו: $h(\theta)=\int_{A_\theta} f\,d\mu$)

נחשב:

$$\int_{\mathbb{T}} h(\theta)\, d\mu(\theta) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(e^{it})\, \mathbb{1}_A (e^{i(t+\theta)})\, d\mu(t) \right) d\mu(\theta) = (*)$$

מכיון ש $f\in L^1(\mathbb{T})$ ו- $\mathbb{1}_A$ חסומה, האינטגרל אינטגרבילי - $\mu\otimes\mu$

ונוכל להפעיל את משפט פוביני ונקבל:

$$(*) = \int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) \left(\int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_A (e^{i(t+\theta)})\, d\mu(\theta) \right) d\mu(t) =$$

מכיון ש μ אינווריאנטית להזזות כלומר = סיבובים (כי $\mu = \frac{m}{2\pi}$ ו- m אינווריאנטית להזזות).

$$= \int_{\mathbb{T}} f(e^{it})\, \underbrace{\mu(A)}_{=b}\, d\mu(t) = b \underbrace{\int_{\mathbb{T}} f(e^{it})\, d\mu(t)}_{=a} = ab$$

בסה"כ, קיבלנו: $\int_{\mathbb{T}} h = ab$.

כעת, אילו לכל $\theta \in [0,2\pi)$: $h(\theta) < ab$

אזי: $\int_{\mathbb{T}} h\, d\mu < \int_{\mathbb{T}} ab\, d\mu = ab$

בסתירה לכך ש- $\int_{\mathbb{T}} h\, d\mu = ab$ (כמו שחישבנו).

לכן, קיים $\theta \in [0,2\pi)$ כך ש- $h(\theta) \geq ab$.