תרגיל 3

1. נתונות הקבוצות הבאות:

$$\begin{array}{rclrclrcl} X_3 &=& \{a,\{\{a\}\}\} & X_2 &=& \{a,\{a\}\} & X_1 &=& \{\{a\}\} \\ X_6 &=& \{a,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\} & X_5 &=& \{a,\{a\},\{\{a\}\}\} & X_4 &=& \{\{a\},\{\{a\}\}\} \end{array}$$

אילון מהטענות נכונות:

א. $X_1 \in X_2$
ב. $X_1 \subseteq X_2$
ג. $X_2 \in X_6$
ד. $X_2 \subseteq X_3$
ה. $X_3 \subseteq X_4$
ו. $X_4 \subseteq X_5$
ז. $X_5 \in X_6$
ח. $X_5 \subseteq X_6$

פיתרון

ב. נכון ג. נכון ו. נכון ח. נכון

2. מצאו קבוצות A,B,C המקיימות את התנאים הבאים:

א. $A\cup B \subseteq A\cup C$ אבל $B \not\subseteq C$.
ב. $A\cap B \subseteq A\cap C$ אבל $B \not\subseteq C$.
ג. $A\in B, B\in C, A\notin C$.
ד. $A\in B, B\in C, A\in C$
ה. $A\in B, A\subseteq B$

פיתרון

א. $A=\{1,2\},B=\{2,3\},C=\{3\}$
ב. $A=\{1\},B=\{2\},C=\{3\}$
ג. $A=\{1\},B=\{\{1\}\},C=\{\{\{1\}\}\}$
ד. $A=\{1\},B=\{\{1\}\},C=\{\{\{1\}\},\{1\}\}$
ה. $A=\{1\},B=\{\{1\},1\}$

3. הוכיחו:

$$\{2n+5|n\in\mathbb{Z}\}=\{2n+9|n\in\mathbb{Z}\}$$

פיתרון

נשתמש בהכלה דו־כיוונית.

לכיוון אחד, יהי $x\in\{2n+5|n\in\mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n\in\mathbb{Z}$ עבורו: $x=2n+5$.

לכן: $x=2(n-2)+9$. מכיוון ש־$n\in\mathbb{Z}$ אז גם $n-2\in\mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+9|n\in\mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x\in\{2n+9|n\in\mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+9|n\in\mathbb{Z}\}\supseteq\{2n+5|n\in\mathbb{Z}\}$$

לכיוון השני, יהי $x \in \{2n+9|n \in \mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו $x = 2n+9$.

לכן: $x = 2(n+2)+5$. מכיוון ש־$n \in \mathbb{Z}$ אז גם $n+2 \in \mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+5|n \in \mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x \in \{2n+5|n \in \mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+9|n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2n+5|n \in \mathbb{Z}\}$$

ולכן סה"כ לפי הכלה דו־כיוונית נקבל:

$$\{2n+5|n \in \mathbb{Z}\} = \{2n+9|n \in \mathbb{Z}\}$$

4. הוכיחו או הפריכו:

א. לכל שתי קבוצות X, Y אם $X \subseteq Y$ אז $X \cup (Y \setminus X) = Y$.

ב. $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$.

ג. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

פיתרון

א. הוכחה: נראה הכלה דו כיוונית:

$\supseteq$: יהי $y \in Y$, אזי אם $y \in X$ אז $y \in X \cup (Y \setminus X)$, אחרת $y \in Y \setminus X$ ולכן $y \in X \cup (Y \setminus X)$.

$\subseteq$: יהי $y \in X \cup (Y \setminus X)$ אזי מתקיים: $y \in X \vee y \in Y \setminus X$. אם $y \in X$ אז מהעובדה ש־$X \subseteq Y$ נובע $y \in Y$. אם $y \in Y \setminus X$ גם נובע ישירות ש־$y \in Y$. ובסה"כ בכל מקרה $y \in Y$.

ב. הוכחה. טענת עזר: אם $X \cap Y = \phi$ אז $X \triangle Y = X \cup Y$.

הוכחת טענת העזר: $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \setminus \phi = X \cup Y$.

כעת אצלנו נשים לב ש־ $(A \triangle B) \cap (A \cap B) = \phi$ ולכן $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = (A \triangle B) \cup (A \cap B) = [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B) = A \cup B$.

הסבר המעברים: השיוויון הראשון זה בדיוק טענת העזר. השיוויון השני זו שקילות של ההפרש הסימטרי. והשיוויון השלישי נובע מכך ש־ $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ ובעזרת סעיף א.

ג. הפרכה: $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{1,4\}$, אזי $(A \setminus B) \setminus C = \{2\} \setminus \{1,4\} = \{2\}$, אבל $A \setminus (B \setminus C) = \{1,2\} \setminus \{3\} = \{1,2\} \neq \{2\}$.

5. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_n = \begin{cases} [0, \frac{n}{2}] & n \text{ is even number} \\ [-\frac{n-1}{2}, 0] & n \text{ is odd number} \end{cases}$$

כאשר $[a,b]$ הוא הקטע הסגור בממשיים.

א. מצא את $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.

ב. מצא את $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.

פיתרון

א. נקבל $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$. נוכיח ע"י הכלה דו־כיוונית:

$\supseteq$: יהי $x \in \mathbb{R}$, אם $x \geq 0$ אזי $x \in [0, \lfloor x \rfloor + 1]$ ולכן $x \in A_{2(\lfloor x \rfloor + 1)}$, ולכן הוא נמצא באיחוד הכללי, המוגדר כאוסף האיברים שנמצאים לפחות באחת הקבוצות, והנה מצאנו אחת כזו. באותו אופן אם $x < 0$ אז $x \in [\lfloor x \rfloor, 0]$ ולכן $x \in A_{2\cdot\lfloor x \rfloor + 1}$.

$\subseteq$:ברור כי כל האיברים כאן הם מהממשיים.

ב. נקבל $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$. נוכיח: ההכלה $\supseteq$ ברורה, כי 0 נמצא בכל אחת מהקבוצות, ולכן בחיתוך של כולם לפי הגדרה. נניח בשלילה שקיים $0 \neq x \in \mathbb{R}$ כך ש $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, אזי לפי הגדרה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x \in A_n$. לכן בפרט $x \in A_3 = [-1, 0]$ אבל $x \neq 0$ ולכן נובע ש־$x < 0$. בנוסף נובע בפרט ש־ $x \in A_2 = [0, 1]$, אבל $x \neq 0$ ולכן נובע ש־$x > 0$ בסתירה לכך שראינו ש־$x < 0$.