

תרגיל 3 אינפי 3

1. האם הגבולות הבאים קיימים או לא? אם כן, מצא אותם.

(א)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

(ב)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$$

(ג)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

(ד)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$$

2. האם קיים  $a \in \mathbb{R}$  כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בנקודה  $(0,0)$ ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} & xy \neq 0 \\ a & \text{אחרת} \end{cases}$$

3. האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה  $(0,0)$ ?

(א)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(ב)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^4) \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

4. תהי  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . הוכח כי רציפה אם ורק אם המקור של כל קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה. (כלומר, אם  $B$  קבוצה סגורה או  $f^{-1}(B)$  גם סגורה)

5. הוכח כי הנורמה האוקלידית הסטנדרטית  $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  היא פונקציה רציפה.

6. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן מצא אותם. האם הגבולות החוזרים של פונקציות אלה קיימים? אם כן, מצא אותם

(א)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

(ב)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \left( \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

(ג)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + \sin(y)}{x + y}$$