

בוחר בדידה חורף תשעו

14/12/2015 ב' טבת

מתרגל: אחיה בר-און.

• ענו על כל השאלות.

• על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. במידה והתשובות נכתבות במחברת בחינה, מספיק לכתוב ת.ז. ושם פעם אחת בעמוד הפותח.

• הקפידו על סדר ניקיון. ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

• משך הבוחן: שעה וחצי.

• השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

• ניקוד: $110 = 25 + 45 + 4 \cdot 10$ (ארבע שאלות נכון/לא נכון של 10 נק' + שאלה של 45 נקודות + שאלה של 25 נקודות)

• מבנה הבחינה:

- שאלה 1 (4 סעיפים): נכון/לא נכון בנושאים שונים.

- שאלה 2: יחסים .

- שאלה 3: אינדוקציה.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

1. ענו נכון/לא נכון (10 נקודות כל סעיף)

(א) עבור p, q פסוקים מתקיים כי

$$p \rightarrow q \equiv q \rightarrow p$$

כאשר \equiv הוא הסימון לשקילות לוגית.

פתרון: לא נכון. אם $p = T, q = F$ אזי $q \rightarrow p$ הוא T ואילו $p \rightarrow q$ הוא F

(ב) נניח U קבוצה (כאשר חושבים עליה כקבוצה אוניברסלית) ונניח $A, B, C \subseteq U$ תתי קבוצות שלה אזי מתקיים

$$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$$

כאשר A^c הוא המשלים של A (במילים אחרות $U \setminus A$)
פתרון: נכון.

(ג) נניח A, B קבוצות אזי מתקיים

$$[A \setminus B = B \setminus A] \iff [A = B]$$

פתרון: נכון.

(\Rightarrow) נתון כי $A \setminus B = B \setminus A$ ולכן

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B) = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = B$$

(\Leftarrow) נתון $A = B$ ולכן

$$A \setminus B = \emptyset = B \setminus A$$

(ד) נניח A, B, C קבוצות אזי מתקיים

$$A \cap (B \cup C) \subseteq B$$

פתרון: לא נכון. ניקח $B = \emptyset$ וניקח $A = C = \{1\}$ אזי

$$A \cap (B \cup C) = A \cap C = A \not\subseteq \emptyset = B$$

2. נגדיר $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. עוד נגדיר \circlearrowleft להיות קבוצת כל יחסי השקילות על X .
נגדיר יחס \prec מעל \circlearrowleft באופן הבא. נניח $R_1, R_2 \in \circlearrowleft$ שני יחסי שקילות על X אזי

$$R_1 \prec R_2 \iff (|X/R_1| < |X/R_2|)$$

כאשר $|X/R_1|$ פירושו מספר האיברים בקבוצת המנה של היחס R_1 .
בניסוח שקול, הקבוצה \prec היא הקבוצה

$$\prec = \{(R_1, R_2) \in \circlearrowleft \times \circlearrowleft \mid |X/R_1| < |X/R_2|\}$$

(א) הוכיחו כי \prec הוא יחס סדר חזק מעל \circlearrowleft . (15 נקודות)

פתרון: אנטי רפלקסיבי: נניח $R \in \circlearrowleft$ אזי $|X/R| = |X/R|$ בפרט לא מתקיים $|X/R| < |X/R|$ ולכן R לא מתייחס לעצמו.

טרנזיטיבי: נניח $R_1 \prec R_2, R_2 \prec R_3$ אזי

$$|X/R_1| < |X/R_2|, |X/R_2| < |X/R_3|$$

ומטרנזיטיביות על מספרים טבעיים נקבל כי

$$|X/R_1| < |X/R_3|$$

שזה גורר $R_1 \prec R_3$

(ב) נגדיר את היחס \preceq מעל \mathbb{Q} להיות יחס הסדר החלש המתקבל מ \prec ע"י איחודו עם יחס הזהות מעל \mathbb{O} . כלומר, נניח $R_1, R_2 \in \mathbb{O}$ שני יחסי שקילות על X אזי

$$[R_1 \preceq R_2] \iff [(R_1 \prec R_2) \vee (R_1 = R_2)]$$

האם זהו יחס קווי? אם כן, הוכיחו. אם לא, הפריכו ע"י דוגמא. (15 נקודות)
פתרון: לא. למשל R_1 המוגדר ע"י החלוקה

$$P_1 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}\}$$

לא מתייחס ל R_2 המוגדר ע"י החלוקה

$$P_2 = \{\{1, 2, 3, 4, 6\}, \{5, 7, 8, 9, 10\}\}$$

וכן לא להפיך. למה? כי $X/R_1 = P_1, X/R_2 = P_2$ וגדלים שלהם שווים ולכן לא מתקיים $R_1 \prec R_2$ וגם לא מתקיים $R_2 \prec R_1$

(ג) מצאו, אם קיימים, איבר קטן ביותר ב (\mathbb{O}, \prec) ואיבר גדול ביותר ב (\mathbb{O}, \prec) (15 נקודות)
פתרון: מתקיים כי לכל R יחס שקילות על X כי

$$1 \leq |X/R| \leq 10$$

כי X/R חלוקה של X . נגדיר R_{Max} להיות יחס הזהות אזי

$$|X/R_{Max}| = 10$$

כי כל מחלקת שקילות היא מגודל 1.

טענה: זהו איבר גדול ביותר. הוכחה: כל יחס שקילות אחר R אם הוא מקיים

$$|X/R| < 10$$

אזי $R \prec R_{Max}$. ואם $|X/R| = 10$ אזי קיימות 10 מחלקות שקילות. כיוון ש $x \in [x]_R$ אזי כל מחלקת שקילות היא לפחות מגודל אחד. כיוון שיש 10 איברים ב X זה אומר שגודל מחלקת שקילות היא בדיוק אחד ולכן זהו יחס הזהות.

נגדיר $R_{min} = X \times X$ אזי $|X/R_{min}| = 1$ כי כולם מתייחסים אחד לשני. טענה: זהו איבר קטן ביותר. הוכחה: כל יחס שקילות אחר R אם הוא מקיים

$$1 < |X/R|$$

אזי $R_{min} \prec R$. ואם $|X/R| = 11$ אזי קיימת מחלקת שקילות אחת. זה אומר שכל האיברים ב X מתייחסים אחד לשני ולכן $R = R_{min}$.

3. (25 נקודות) נניח (A, \leq) קבוצה סדורה חלקית (חלש) שהיא שריג (כלומר שלכל שני איברים $a, b \in A$ קיימים $\sup\{a, b\}, \inf\{a, b\}$).

הוכיחו כי לכל קבוצה בת n איברים $B = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ (כאשר $0 < n \in \mathbb{N}$) קיימים $\sup(B), \inf(B)$
פתרון: נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 1$ (כלומר $B = \{a\}$) מתקיים כי

$$\sup(B) = \inf(B) = a$$

[עבור $n = 2$ לפי ההגדרה של שריג קיימים \sup ו \inf].

כעת נניח שהטענה נכונה לקבוצה עם n איברים ונוכיח כי הטענה נכונה עבור קבוצה עם $n + 1$ איברים. תהא $B = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$. לפי הנחת האינדוקציה קיים $M' = \sup\{a_1, \dots, a_n\}$.

לפי הגדרת שריג קיים $M = \sup\{M', a_{n+1}\}$. טענה $M = \sup B$.

הוכחה: (1) M חסם מלעיל: אם $1 \leq i \leq n$ אזי $a_i \leq M'$ לפי הגדרת M' (בפרט הוא חסם מלעיל). בנוסף $M' \leq M$ לפי הגדרת M . מטרגניטיבות נקבל כי $a_i \leq M$.

בנוסף, לפי הגדרת M נקבל כי $a_{n+1} \leq M$ ולכן בסך הכל נקבל כי לכל $1 \leq i \leq n + 1$ מתקיים $a_i \leq M$.

(2) נניח L חסם מלעיל של B ונראה כי $M \leq L$. כיוון ש L חסם מלעיל של B הוא בפרט חסם מלעיל של $\{a_1, \dots, a_n\}$ ולכן מהגדרת \sup ו $M' \leq L$ נקבל כי $M' \leq L$. כיוון ש L גם מקיים $a_{n+1} \leq L$ נקבל כי L הוא חסם מלעיל של הקבוצה $\{M', a_{n+1}\}$. לכן לפי הגדרת \sup ו $M = \sup\{M', a_{n+1}\}$ נקבל כי $M \leq L$ כנדרש.