תרגילים ממבחנים של אחרים

מדעי המח תשפג מועד א

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{2x}{y+x^2y}$ המקיים $y(0) = -2$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון.

$$y' = \frac{2x}{y + x^2y} = \frac{2x}{y\left(1 + x^2\right)}$$

ולכן $yy' = \frac{2x}{(1+x^2)}$. זוהי מדר פרידה ובכתיב אחר:

$$y\mathrm{dy} = \frac{2x}{(1 + x^2)}\mathrm{dx}$$

ונעשה אינטגרלים לשני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו).

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left(1 + x^2\right) + C$$

ולכן

$$y = \pm\sqrt{2\ln\left(1 + x^2\right) + C}$$

(זה לא אותו C ממקודם). נציב תנאי התחלה

$$-2 = y(0) = -\sqrt{2\ln\left(1 + 0^2\right) + C}$$

(חייבים לבחור את הפתרון עם המינוס) ואז

$$4 = C$$

ולכן הפתרון הסופי הוא

$$y=-\sqrt{2\ln\left(1+x^2\right)+4}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\left(x+y^2\right)\mathrm{dx}-2xy\mathrm{dy}=0$ המקיים $y(1)=1$.

פתרון: נבדוק אם המד"ר מדוייקת. נסמן

$$P\left(x,y\right)=x+y^2$$
$$Q\left(x,y\right)=-2xy$$

ואז

$$P_y=2y\quad Q_x=-2y$$

ולכן היא אינה מדויקת. נדייק אותו בעזרת

$$\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}\mathrm{dx}}=e^{\int\frac{2y+2y}{-2xy}\mathrm{dx}}=e^{-2\int\frac{1}{x}\mathrm{dx}}=e^{-2\ln(x)}=x^{-2}$$

כלומר: נסתכל על המד"ר השקולה שכעת מדויקת:

$$\frac{\left(x+y^2\right)}{x^2}\mathrm{dx}-\frac{2y}{x}\mathrm{dy}$$

ונגדיר מחדש

$$P\left(x,y\right)=\frac{x+y^2}{x^2}$$
$$Q\left(x,y\right)=-\frac{2y}{x}$$

וכעת נגדיר

$$U\left(x,y\right)=\int Q\left(x,y\right)\mathrm{dy}=-\frac{y^2}{x}+c(x)$$

ונמצא את $c(x)$. כיוון שצריך $U_x=P$, נשווה בניהם:

$$U_x=\frac{y^2}{x^2}+c'(x)=\frac{x+y^2}{x^2}$$

לכן

$$c'(x)=\frac{x+y^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{x}$$

ולכן $c(x)=\ln|x|$. מכאן ש $U(x,y)=C$ או

$$-\frac{y^2}{x}+\ln|x|=C$$

ולכן

$$\pm\sqrt{x\left(\ln|x|+C\right)}=y$$

ונציב תנאי התחלה.

$$1=y(1)=\pm\sqrt{1\left(\ln|1|+C\right)}$$

ולכן צריך לבחור את הפתרון החיובי ובנוסף $C=1$. לסיכום:

$$y=\sqrt{x\left(\ln|x|+1\right)}.$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y''-3y'+2y=e^x$ המקיים $y(0)=2,y'(0)=2$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y''-3y'+2y=0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

בעל שורשים $1,2$ ולכן e^x,e^{2x} בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x)=e^x$ שמתאים ל 1 שהינו שורש של הפולינום האופייני, ננחש פתרון מהצורה $y_p=\alpha xe^x$. מתקיים

$$y_p'=\alpha(1+x)e^x$$
$$y_p''=\alpha(2+x)e^x$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned} e^x &= \alpha\left(2+x\right)e^x - 3\alpha\left(1+x\right)e^x + 2\alpha x e^x \\ &= \left[\left(2+x\right) - 3\left(1+x\right) + 2x\right]\alpha e^x \\ &= -\alpha e^x \end{aligned}$$

ונקבל $\alpha = -1$. לסיכום:

$$y_p = -xe^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = -xe^x + C_1e^x + C_2e^{2x}$$

ו

$$y' = -\left(1+x\right)e^x + C_1e^x + 2C_2e^{2x}$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$2 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$2 = y'(0) = -1 + C_1 + 2C_2$$

ולכן $C_1 = 2 - C_2$ ו $C_1 = 3 - 2C_2$. מכאן ש $3 - 2C_2 = 2 - C_2$ ולכן $C_2 = 1$ ואז $C_1 = 2 - 1 = 1$. לסיכום:

$$y = -xe^x + e^x + e^{2x}.$$

4. כדור בעל מסה $m = 1\text{kg}$ נעזב במהירות התחלתית אפס. מה תהיה מהירות הכדור לאחר 2 שניות כאשר: (בשתי הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$).

(א) הכח היחיד הפועל על הכדור הוא כח המשיכה mg.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מטה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון החיובי. לכן הכח הוא g.

מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$g = ma = a$$

או $g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0) = 0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = gt$. המהירות לאחר 2 שניות היא $y'(2) = g \cdot 2 = 20$ (מטר לשניה).

(ב) הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה mg וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות v

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מטה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון החיובי. בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $g - v$. מהשיוון $F = ma$)כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$g - v = ma = a$$

או $g - y'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + z = g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = 1, b(x) = g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C + \int ge^{x}\mathrm{dx}\right) = e^{-x}\left(C + ge^{bx}\right) = e^{-x}C + g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-t}C + g$$

או

$$.y'(t)=e^{-t}C+g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0=y'(0)=e^{-0}C+g=C+g$$

ומכאן $C=-g$. מכאן שהמהירות אחרי 2 שניות היא

$$.y'(2)=e^{-2}\cdot(-g)+g=g\left(1-e^{-2}\right)$$

מדעי המח תשפג מועד ב

5. מצאו פתרון למד"ר $(xy'-1)\ln(x)=2y$ המקיים $y(e)=0$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון. נעביר אגפים $y'x\ln(x)-2y=\ln(x)$. נחלק ב $x\ln(x)$ לקבל

$$y'-\frac{2}{x\ln(x)}y=\frac{1}{x}$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $b(x)=\frac{1}{x}$, $a(x)=-\frac{2}{x\ln(x)}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב $A(x)$:

$$A(x)=\int-\frac{2}{x\ln(x)}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{c}t=\ln(x)\\ \mathrm{dt}=\frac{1}{x}\mathrm{dx}\end{array}\right\}=-2\int\frac{1}{t}\mathrm{dt}=-2\ln|\ln(x)|$$

ואז נציב

$$e^{2\ln|\ln(x)|}\left(C+\int\frac{1}{x}e^{-2\ln|\ln(x)|}\mathrm{dx}\right)=\ln^2(x)\left(C+\int\frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{dx}\right)$$

נחשב

$$\int\frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{c}t=\ln(x)\\ \mathrm{dt}=\frac{1}{x}\mathrm{dx}\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{\ln(x)}$$

ולכן, פתרון כללי הוא

$$\begin{aligned} y(x) &= \ln^2(x)\left(C + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{dx}\right) \\ &= \ln^2(x)C - \ln(x) \end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה $y(e) = 0$ למצוא את הקבוע C.

$$0 = y(e) = \ln^2(e)C - \ln(e) = C - 1$$

לכן $C = 1$ והפתרון הוא

$$y(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$$

6. מצאו פתרון למד"ר $\left(1 + y^2\sin(2x)\right)\mathrm{dx} - 2y\cos^2(x)\mathrm{dy} = 0$ המקיים $y(0) = -2$.

פתרון: נבדוק אם המד"ר מדוייקת. נסמן

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 1 + y^2\sin(2x) \\ Q(x, y) &= -2y\cos^2(x) \end{aligned}$$

ואז

$$P_y = 2y\sin(2x) \quad Q_x = 4y\cos(x)\sin(x) = 2y\sin(2x)$$

ולכן היא מדויקת. כעת נגדיר

$$U(x, y) = \int Q(x, y)\,\mathrm{dy} = -y^2\cos^2(x) + c(x)$$

ונמצא את $c(x)$. כיוון שצריך $U_x = P$, נשווה בניהם:

$$U_x = 2y^2\cos(x)\sin(x) + c'(x) = 1 + y^2\sin(2x)$$

$$y^2\sin(2x) + c'(x) = 1 + y^2\sin(2x)$$

לכן $c'(x) = 1$ ומכאן ש $c(x) = x$. סה"כ נקבל ש $U(x,y) = C$ או

$$-y^2 \cos^2(x) + x = C$$

ולכן

$$\pm\sqrt{\frac{x+C}{\cos^2(x)}} = y$$

ונציב תנאי התחלה.

$$-2 = y(0) = \pm\sqrt{\frac{0+C}{\cos^2(0)}} = \pm\sqrt{C}$$

ולכן צריך לבחור את הפתרון החיובי ובנוסף $C = 4$. לסיכום:

$$y = -\sqrt{\frac{x+4}{\cos^2(x)}}.$$

7. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$ המקיים $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y'' - 2y' + y = 0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x, xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h = C_1 e^x + C_2 xe^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x) = xe^{2x}$ שהוא פולינום מדרגה 1 שמוכפל ב e^{2x} (שמתאים ל 2 שהוא לא שורש של הפולינום האופייני), ננחש פתרון מהצורה $y_p = (\alpha_0 + \alpha_1 x) e^{2x}$. מתקיים

$$y_p' = [2(\alpha_0 + \alpha_1 x) + \alpha_1] e^{2x}$$
$$y_p'' = [4(\alpha_0 + \alpha_1 x) + 2\alpha_1 + 2\alpha_1] e^{2x} = 4(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_1 x) e^{2x}$$

ונציב במד"ר

$$
\begin{aligned}
xe^{2x} &= 4\left(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1 x\right)e^{2x} - 2\left[2\left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)+\alpha_1\right]e^{2x} + \left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)e^{2x} \\
&= \left[4\left(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1 x\right) - 2\left[2\left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)+\alpha_1\right] + \left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)\right]e^{2x} \\
&= \left[\left(2\alpha_1+\alpha_0\right)+\alpha_1 x\right]e^{2x}
\end{aligned}
$$

ונקבל

$$x = \left(2\alpha_1+\alpha_0\right)+\alpha_1 x$$

ולכן $\alpha_1 = 1$ ו $2\alpha_1+\alpha_0 = 0$. ולכן $\alpha_1 = 1, \alpha_0 = -2$. לסיכום:

$$y_p = \left(-2+x\right)e^{2x}$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = \left(-2+x\right)e^{2x} + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

ו

$$y' = \left(-3+2x\right)e^{2x} + C_1 e^x + C_2\left(x+1\right)e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$0 = y(0) = -2 + C_1$$

$$0 = y'(0) = -3 + C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 2$ ו $C_2 = 3 - C_1 = 1$. לסיכום:

$$.y = \left(-2+x\right)e^{2x} + 2e^x + xe^x$$

8. כדור בעל מסה $m = 1\text{kg}$ נבעט לכיוון מעלה במהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. מה יהיה גובה הכדור ברגע שהמהירות הרגעית שלו תתאפס כאשר: (בשני הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$.)

(א) הכח היחיד הפועל על הכדור הוא כח המשיכה mg.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$.
מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g=ma=a$$

או $g=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t)=-gt+c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0)=20$ (המהירות ההתחלתית 20 כלפי מעלה שהוא הכיוון החיובי) לכן

$$20=y'(0)=-g\cdot 0+c=c$$

ולכן $y'(t)=-gt+20$. המהירות תתאפס כאשר $y'(t)=0$ או

$$gt=20$$

כלומר לאחר $t=\frac{20}{g}=2$ שניות. המיקום $y(t)$ שווה ל

$$y(t)=\int y'=-g\frac{t^2}{2}+20t+C$$

ומתנאי ההתחלה $y(0)=0$ נקבל

$$0=C$$

לכן $y(t)=-g\frac{t^2}{2}+20t$ והגובה שלו לאחר 2 שניות (הזמן שהמהירות מתאפסת) הוא

$$y(2)=-g\frac{4}{2}+40=20.$$

(ב) הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה mg וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות v.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי (כלומר $-g$). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל

הוא $-g-v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-v=ma=a$$

או $-g-y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+z=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=1, b(x)=-g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C-\int ge^{x}\mathrm{dx}\right)=e^{-x}\left(C-ge^{bx}\right)=e^{-x}C-g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-t}C-g$$

או

$$.y'(t)=e^{-t}C-g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה שהוא החיובי) לכן

$$20=y'(0)=e^{-0}C-g=C-g$$

ומכאן $C=20+g=30$. קיבלנו $y'(t)=30e^{-t}-g$ והמהירות מתאפס כאשר $y'(t)=0$ או

$$g=30e^{-t}$$

$$e^{-t}=\frac{1}{3}$$

$$-t=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

ולכן $t=\ln(3)$. המיקום הוא

$$y(t)=\int y'=\int\left(30e^{-t}-g\right)=-30e^{-t}-gt+C$$

ותנאי ההתחלה $y(0)=0$ יתן

$$0=-30+C$$

כלומר $C=30$ ו $y(t)=-30e^{-t}-gt+30$. הגובה בזמן $t=\ln(3)$ בו המהירות מתאפסת הוא

$$\begin{aligned}y\left(\ln(3)\right)&=-30e^{-(\ln(3))}-g\left(\ln(3)\right)+30\\&=-30\frac{1}{3}-10\ln(3)+30\\&=20-10\ln(3)\end{aligned}$$

הנדסה תשפג מועד ב

9. מצאו פתרון למד"ר $\left(e^x+1\right)y'+1=-ye^x$ המקיים $y(0)=0$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון. נעביר אגפים $\left(e^x+1\right)y'+ye^x=-1$. נחלק ב e^x+1 לקבל

$$y'+y\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)}=-\frac{1}{\left(e^x+1\right)}$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $b(x)=-\frac{1}{e^x+1},a(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב $A(x)$:

$$A(x)=\int\frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{c}t=e^x\\ \mathrm{dt}=e^x\mathrm{dx}\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t+1}\mathrm{dt}=\ln\left(e^x+1\right)$$

ואז נציב

$$e^{-\ln\left(e^x+1\right)}\left(C-\int\frac{1}{e^x+1}e^{\ln\left(e^x+1\right)}\mathrm{dx}\right)=\frac{1}{e^x+1}\left(C-\int 1\mathrm{dx}\right)=$$

$$= \frac{C-x}{e^x+1}$$

ולכן, פתרון כללי הוא

$$y(x) = \frac{C-x}{e^x+1}$$

נציב תנאי התחלה $y(0)=0$ למצוא את הקבוע C.

$$0 = y(0) = \frac{C}{1+1}$$

לכן $C=0$ והפתרון הוא

$$y(x) = \frac{-x}{e^x+1}$$

10. מצאו שני פתרונות למד"ר $\frac{1}{2} = (x+xy)\,y'$ המקיימים $y\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

פתרון: נוציא x:

$$(1+y)\,y' = \frac{1}{2}$$

ונחלק x ורשום בצורה שקולה

$$(1+y)\,\mathrm{dy} = \frac{\mathrm{dx}}{2x}$$

לקבל מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו):

$$y + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

נעביר אגף ו

$$\frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2}\ln|x| + C = 0$$

(C קבוע כל שהוא. לא אותו אחד ממקודם). לכן

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)} = -1 \pm \sqrt{1 + \ln|x| + C}$$

ויש שתי פתרונות (שמתאימים ל $\pm$). נציב תנאי התחלה $y\left(\frac{1}{e}\right)=-1$ בכל אחד לקבל פתרון פרטי. הראשון:

$$y_1(x)=-1+\sqrt{1+\ln|x|+C}$$

ואז

$$-1=y_1\left(\frac{1}{e}\right)=-1+\sqrt{1-1+C}$$

ולכן $\sqrt{C}=0$. מכאן ש $C=0$. הפתרון השני:

$$y_2(x)=-1-\sqrt{1+\ln|x|+C}$$

ואז

$$-1=y_2\left(\frac{1}{e}\right)=-1-\sqrt{1-1+C}$$

ולכן $C=0$ כמו מקודם. לסיכום, שני הפתרונות הם:

$$y_1(x)=-1+\sqrt{1+\ln|x|}$$

$$y_2(x)=-1-\sqrt{1+\ln|x|}$$

11. מצאו פתרון למד"ר $y''-2y'+y=2e^x$ המקיים $y(0)=2, y'(0)=5$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y''-2y'+y=0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x, xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h=C_1e^x+C_2xe^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x)=2e^x$ שהוא פולינום מדרגה 0 שמוכפל ב e^x (שמתאים ל

1 שהוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2, ננחש פתרון מהצורה $y_p = \alpha x^2 e^x$. מתקיים

$$y_p' = \alpha\left(x^2+2x\right)e^x$$
$$y_p'' = \alpha\left(x^2+4x+2\right)e^x$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned}2e^x &= \alpha\left(x^2+4x+2\right)e^x - 2\alpha\left(x^2+2x\right)e^x + \alpha x^2 e^x\\ &= \left[\left(x^2+4x+2\right) - 2\left(x^2+2x\right) + x^2\right]\alpha e^x\\ &= 2\alpha e^x\end{aligned}$$

ונקבל $\alpha = 1$ והפתרון הפרטי

$$y_p = x^2 e^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = x^2e^x + C_1e^x + C_2xe^x$$

ו

$$y' = \left(x^2+2x\right)e^x + C_1e^x + C_2\left(x+1\right)e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$2 = y(0) = C_1$$

$$5 = y'(0) = C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 2$ ו $C_2 = 5 - C_1 = 3$. לסיכום:

$$y = x^2e^x + 2e^x + 3xe^x.$$

12. כדור בעל מסה $m = 2$ נזרק כלפי מעלה במהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. הניחו כי קבוע הכבידה של כדור הארץ הוא $g = 10$ מטר לשנייה בריבוע.

(א) בהנחה שכוח המשיכה הוא הכוח היחיד הפועל על הכדור, חשבו את הזמן בו הכדור יגיע לשיא הגובה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$.
מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g=ma=a$$

או $g=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t)=-gt+c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0)=20$ (המהירות ההתחלתית 20 כלפי מעלה שהוא הכיוון החיובי) לכן

$$20=y'(0)=-g\cdot 0+c=c$$

ולכן $y'(t)=-gt+20$. בגובה המקסימאלי ,המהירות תתאפס, וזה קורה כאשר $y'(t)=0$ או

$$gt=20$$

כלומר לאחר $t=\frac{20}{g}=2$ שניות.

(ב) בהנחה שבנוסף לכוח המשיכה, כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל המהירות, מה תהיה מהירות הכדור ומה יהיה כיוונה לאחר שנייה אחת?

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי (כלומר $-g$). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $\frac{1}{2}v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-\frac{1}{2}v$. לכן הכח הכולל הוא $-g-\frac{1}{2}v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-\frac{1}{2}v=ma=a$$

או $-g-\frac{1}{2}y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+\frac{1}{2}z=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = \frac{1}{2}, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = \frac{1}{2}x$ ונציב

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(C - \int ge^{\frac{1}{2}x}\mathrm{dx}\right) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C - 2ge^{\frac{1}{2}x}\right) = e^{-\frac{1}{2}x}C - 2g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-\frac{1}{2}x}C - 2g$$

או

$$.y'(t) = e^{-\frac{1}{2}x}C - 2g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה שהוא החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}C - 2g = C - 2g$$

ומכאן $C = 20 + 2g = 40$. קיבלנו $y'(t) = 40e^{-\frac{1}{2}x} - 2g$ והמהירות אחרי שניה המהירות תהיה

$$y'(1) = 40e^{-\frac{1}{2}\cdot 1} - 2g = \frac{40}{\sqrt{e}} - 20 \approx 4.26$$

בכיוון החיובי (כלומר כלפי מעלה).

$$x = 2\ln(2)$$

13. יהי פרמטר חיובי $0 < a \in \mathbb{R}$ ונביט במד"ר $y' = y - 2axy^3$. עבור אילו ערכי a, אם בכלל, קיים פתרון למד"ר המקיים $y(0) = -1$ וכן $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

פתרון: נסדר מחדש לקבל

$$y' - y = -2axy^3$$

שזוהי משוואת ברנולי מהצורה $y' + p(x)y = q(x)y^n$ עם $n = 3$, $q(x) = -2ax$, $p(x) = -1$.

נציב $z=y^{1-n}=y^{-2}$ ונקבל את המשוואה

$$\frac{z'}{1-n}+p(x)z=q(x)$$

נכפיל ב $1-n$ ונקבל

$$z'+(1-n)\,p(x)z=(1-n)\,q(x)$$

או מפורשות

$$z'+(-2)\,(-z)=(-2)\,(-2ax)$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ עבור $a(x)=2, b(x)=4ax$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)=\int a(x)\mathrm{dx}=\int 2\mathrm{dx}=2x$. נציב ונקבל

$$.z(t)=e^{-2x}\left(C+\int 4axe^{2x}\mathrm{dx}\right)$$

נחשב את האינטגל מימין ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$\int xe^{2x}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{ccc} f=x & \Rightarrow & f'=1 \\ g'=e^{2x} & & g=\frac{e^{2x}}{2}\end{array}\right\}=x\frac{e^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{dx}=$$

$$=x\frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{2\cdot 2}=\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

ונקבל לסיכום:

$$z(t)=e^{-2x}\left(C+4a\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=e^{-2x}C+a\,(2x-1)$$

$$.y=z^{\frac{1}{1-n}}=z^{\frac{1}{-2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{z}}=\pm\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}C+a\,(2x-1)}}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה $y(0)=-1$ למצוא את C :

$$-1=y(0)=-\frac{1}{\sqrt{C-a}}$$

ונקבל שצריך לקחת את הפתרון עם המינוס וכן ש $\sqrt{C-a}=1$. נבודד את C ונגלה $C=a+1$. לכן הפתרון גהוא

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}(a+1)+a(2x-1)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}\left[(a+1)+e^{2x}a(2x-1)\right]}} \\ &= -\frac{e^{x}}{\sqrt{(a+1)+e^{2x}a(2x-1)}} \end{aligned}$$

ונראה שלכל a מתקיים $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=0$. נשתמש בלופיטל לחשב

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}a(2x-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(2x-1)}{e^{-2x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2a}{-2e^{-2x}}=0$$

ולכן

$$-\frac{e^{x}}{\sqrt{(a+1)+e^{2x}a(2x-1)}}\xrightarrow{x\to-\infty}-\frac{0}{\sqrt{a+1+0}}=0$$

כנדרש.

הנדסה תשפג בוחן

14. מצאו פתרון למד"ר $y'=x\left(y^{3}-y\right)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

פתרון: נסדר מחדש לקבל

$$y'+xy=xy^{3}$$

שזוהי משוואת ברנולי מהצורה $y'+p(x)y=q(x)y^{n}$ עם $n=3$, $q(x)=x$, $p(x)=x$.

נציב $z=y^{1-n}=y^{-2}$ ונקבל את המשוואה

$$\frac{z'}{1-n}+p(x)z=q(x)$$

נכפיל ב $1-n$ ונקבל

$$z'+(1-n)\,p(x)z=(1-n)\,q(x)$$

או מפורשות

$$z'+(-2)\,xz=(-2)\,x$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ עבור $a(x)=-2x, b(x)=-2x$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)=\int a(x)\mathrm{dx}=\int -2x\mathrm{dx}=-x^2$. נציב ונקבל

$$\begin{aligned} z(t)&=e^{x^2}\left(C+\int -2xe^{-x^2}\mathrm{dx}\right).\\ &=e^{x^2}\left(C+e^{-x^2}\right)\\ &=e^{x^2}C+1\end{aligned}$$

נחזור ל y:

$$y(x)=z^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{e^{x^2}C+1}}.$$

נציב תנאי התחלה $y(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=y(0)=\frac{1}{\sqrt{C+1}}$$

$$\pm\sqrt{C+1}=\sqrt{2}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס. בנוסף $C=1$. לסיכום:

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{e^{x^2}+1}}$$

15. מצאו פתרון למד"ר $\left(1-\frac{y}{x}\right)y'=1-\frac{y}{x}-\frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נחלק ב $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ לקבל:

$$y'=1-\frac{e^x}{2x\left(1-\frac{y}{x}\right)}$$

$$y'=1-\frac{e^x}{2\left(x-y\right)}$$

נגדיר $z=x-y$ ואז $z'=1-y'$ ונציב:

$$1-z'=1-\frac{e^x}{2z}$$

$$\frac{e^x}{2z}=z'$$

$$e^x=2zz'$$

ובצורה שקולה

$$e^x\mathrm{dx}=2z\mathrm{dz}.$$

קיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^x+C=z^2$$

וקיבלנו

$$z=\pm\sqrt{e^x+C}$$

נחזור ל y:

$$y=x-z=x\pm\sqrt{e^x+C}.$$

נציב תנאי התחלה $y(1)=0$

$$0=y(1)=1\pm\sqrt{e+C}$$

$$\pm\sqrt{e+C}=-1$$

לכן צריך לקחת את הפתרון של המינוס. נמשיך לבודד את C

$$\sqrt{e+C}=1$$

$$C=1-e$$

וסה"כ התשובה היא

$$.y(x) = x - \sqrt{e^x + 1 - e}$$

16. כדורגל בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ נבעט כלפי מעלה מהרצפה במהירות התחלתית של $20\ m/sec$. הניחו כי כוח המשיכה הוא קבוע ושווה ל mg, כאשר g קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ. הניחו כי $g = 10$. מצאו את גובה הכדור לאחר 2 שניות, במקרים הבאים:

(א) בהנחה שאין כוחות נוספים פרט לכוח המשיכה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $-g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0) = 20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = -g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt + 20$. המהירות לאחר 2 שניות היא $y'(2) = -g \cdot 2 + 20 = 0$ (מטר לשניה).

(ב) בהנחה שכוח התנגדות האוויר בכל רגע שווה בגודלו לגודל המהירות של הכדור.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל v וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $-g - v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g - v = ma = a$$

או $-g - y'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + z = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = 1, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C - \int ge^{x}\mathrm{dx}\right) = e^{-x}\left(C - ge^{x}\right) = e^{-x}C - g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-t}C - g$$

או

$$.y'(t) = e^{-t}C - g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = e^{-0}C - g = C - g$$

ומכאן $C = 20 + g$. מכאן שהמהירות אחרי 2 שניות היא

$$.y'(2) = e^{-2}\cdot(20+g) - g = 30e^{-2} - 10 = -5.94$$

כלומר המהירות 5.94 כלפי מטה.

מתמטיקה תשפג מועד ב

17. מצאו פתרון למד"ר $x^2y' + xy + 1 = 0$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 0$.

פתרון: אחרי חילוק ב x^2 והעברת אגף נקבל

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $a(x) = \frac{1}{x}, b(x) = -\frac{1}{x^2}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב

$$A(x)=\int a(x)\mathrm{dx}=\int \frac{1}{x}\mathrm{dx}=\ln|x|$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned}y(t)&=e^{-\ln|x|}\left(C+\int-\frac{1}{x^2}e^{\ln|x|}\mathrm{dx}\right)\\&=|x|^{-1}\left(C-\int\frac{1}{x^2}\,|x|\,\mathrm{dx}\right)\\&=|x|^{-1}\,C-|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}\end{aligned}.$$

כעת: עבור $x>0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}=x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ועבור $x<0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}=-x^{-1}\int\frac{-x}{x^2}\mathrm{dx}=x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ולכן נוכל להמשיך עם $x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$. נמשיך:

$$\begin{aligned}y(x)&=|x|^{-1}\,C-|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}\,C-x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}\,C-x^{-1}\ln|x|\end{aligned}$$

ונציב תנאי התחלה $y(1)=0$.

$$0=y(1)=|1|^{-1}\,C-0=C$$

ולכן

$$y(x)=-x^{-1}\ln|x|.$$

18. מצאו פתרון למד"ר $\left(1-\frac{y}{x}\right)y'=1-\frac{y}{x}-\frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נחלק ב $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ לקבל:

$$y' = 1 - \frac{e^x}{2x\left(1-\frac{y}{x}\right)}$$

$$y' = 1 - \frac{e^x}{2\left(x-y\right)}$$

נגדיר $z = x - y$ ואז $z' = 1 - y'$ ונציב:

$$1 - z' = 1 - \frac{e^x}{2z}$$

$$\frac{e^x}{2z} = z'$$

$$e^x = 2zz'$$

ובצורה שקולה

$$e^x \mathrm{dx} = 2z\mathrm{dz}.$$

קיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^x + C = z^2$$

וקיבלנו

$$z = \pm\sqrt{e^x + C}$$

נחזור ל y:

$$y = x - z = x \pm \sqrt{e^x + C}.$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 0$

$$0 = y(1) = 1 \pm \sqrt{e + C}$$

$$\pm\sqrt{e+C}=-1$$

לכן צריך לקחת את הפתרון של המינוס. נמשיך לבודד את C

$$\sqrt{e+C}=1$$

$$C=1-e$$

וסה"כ התשובה היא

$$.y(x)=x-\sqrt{e^x+1-e}$$

19. מצאו פתרון למד"ר $y''-2y'+y=xe^x$ המקיים $y(0)=0, y'(0)=1$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר ההומוגנית $y''-2y'+y=0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x, xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומוגנית הוא

$$.y_h=C_1e^x+C_2xe^x$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x)=xe^x$ שהוא פולינום מדרגה 1 שמוכפל ב e^x (שמתאים ל 1 שהוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2), ננחש פתרון מהצורה $y_p=(\alpha_0+\alpha_1x)\,x^2e^x$. מתקיים

$$\begin{aligned}
y_p' &= \left((\alpha_0+\alpha_1x)\,x^2+2x\,(\alpha_0+\alpha_1x)+\alpha_1x^2\right)e^x\\
&= \left((\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)\,x^2+2x\alpha_0\right)e^x\\
y_p'' &= \left((\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)\,x^2+2x\alpha_0+2\alpha_0+2x\,(\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)+\alpha_1x^2\right)e^x\\
&= \left((\alpha_0+4\alpha_1+\alpha_1x)\,x^2+2x\,(2\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1x)+2\alpha_0\right)e^x
\end{aligned}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned} xe^x &= (\alpha_0+\alpha_1 x)\,x^2e^x - 2\left((\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1 x)\,x^2+2x\alpha_0\right)e^x \\ &\quad+\left((\alpha_0+4\alpha_1+\alpha_1 x)\,x^2+2x\,(2\alpha_0+3\alpha_1+\alpha_1 x)+2\alpha_0\right)e^x \\ &= [2\alpha_0+6\alpha_1 x]\,e^x \end{aligned}$$

ונקבל $2\alpha_0=0, 6\alpha_1=1$. מכאן ש $\alpha_0=0, \alpha_1=\frac{1}{6}$ והפתרון הפרטי הוא

$$y_p=\left(0+\frac{1}{6}x\right)x^2e^x=\frac{1}{6}x^3e^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y=y_p+y_h=\frac{1}{6}x^3e^x+C_1e^x+C_2xe^x$$

ו

$$y'=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^x+C_1e^x+C_2\,(x+1)\,e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$0=y(0)=C_1$$

$$1=y'(0)=C_1+C_2$$

ולכן $C_1=0$ ו $C_2=1-C_1=1$. לסיכום:

$$.y=\frac{1}{6}x^3e^x+xe^x$$

20. כדורגל בעל מסה של $m=2\text{kg}$ נזרק כלפי מעלה מגובה של $y_0=10m$ ומגיע לקרקע לאחר 2 שניות. כמו כן נתון כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל מהירות הכדור. לצורך הפשטות הניחו כי קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ הוא $g=10$.

(א) מצאו את המהירות בה נזרק הכדור.

פתרון: נסמן מיקום הארץ ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0)=10$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=2\cdot 10=20$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל

על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $\frac{1}{2}v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-\frac{1}{2}v$. לכן הכח הכולל הוא $-2g-\frac{1}{2}v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-2g-\frac{1}{2}v=ma=a$$

או $-2g-\frac{1}{2}y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונכפול ב 2 ונקבל

$$z'+2z=-4g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=2, b(x)=-4g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=2x$ ונציב

$$e^{-2x}\left(C-\int 4ge^{2x}\mathrm{dx}\right)=e^{-2x}\left(C-2ge^{2x}\right)=e^{-2x}C-2g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-2t}C-2g$$

או

$$y'(t)=e^{-2t}C-2g.$$

מכאן, ע"י אינטגרל פשוט, נקבל

$$y(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}C-2gt+D.$$

כעת נציב נתוני השאלה. נתון כי $y(0)=10$ ו $y(2)=0$. נקבל את המשוואות

$$\begin{cases}10=y(0)=-\frac{1}{2}C+D\\0=y(2)=-\frac{1}{2}e^{-4}C-4g+D\end{cases}$$

ומהמשוואה הראשונה נקבל $D = 10 + \frac{1}{2}C$. נציב במשוואה השניה

$$0 = -\frac{1}{2}e^{-4}C - 4g + D = -\frac{1}{2}e^{-4}C - 4g + 10 + \frac{1}{2}C =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}\right)C - 30$$

לכן $\frac{60}{(1-e^{-4})} = \frac{30}{\left(-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}\right)} = C$ ו $D = 10 + \frac{1}{2}C = 10 + \frac{1}{2}\frac{60}{(1-e^{-4})} = 10 + \frac{30}{(1-e^{-4})}$. נחזור ל y' ונציב את C שמצאנו

$$y'(t) = e^{-2t}\frac{60}{(1-e^{-4})} - 2g$$

ונקבל שהמהירות ההתחלתית היא

$$y'(0) = \frac{60}{(1-e^{-4})} - 2g = \frac{60}{(1-e^{-4})} - 20$$

(ב) מצאו את תאוצת הכדור ברגע הפגיעה בקרקע.

פתרון: בסעיף הקודם ראינו ש

$$y'(t) = e^{-2t}\frac{60}{(1-e^{-4})} - 2g$$

ולכן פונקצית התאוצה היא

$$y''(t) = e^{-2t} \cdot \frac{-120}{(1-e^{-4})}.$$

הכדור פוגע בקרקע לאחר 2 שניות ולכן התאוצה אז היא

$$y''(2) = e^{-4} \cdot \frac{-120}{(1-e^{-4})} = \frac{-120}{(e^4-1)}$$

מתמטיקה תשפג מועד א

21. מצאו פתרון למד"ר $y' + y = xy^2$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = \frac{1}{2}$.

פתרון: זוהי מד"ר ברנולי מהצורה

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

עבור $p = 1, q = x, n = 2$. נציב $z = y^{1-n} = y^{-1}$ ונקבל את המד"ר

$$z' + (1-n)\, p(x)z = (1-n)\, q(x)$$

או מפורשות

$$z' - z = -x$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ עבור $a(x) = -1, b(x) = -x$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)} \left(C + \int b(x) e^{A(x)} \mathrm{dx} \right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. למשל נבחר $A(x) = -x$ ואז

$$z(x) = e^x \left(C - \int x e^{-x} \mathrm{dx} \right)$$

נחשב את הקדומה של xe^{-x} על ידי אינטגרציה בחלקים

$$\int x e^{-x} \mathrm{dx} = \left\{ \begin{array}{ccc} f = x & \Rightarrow & f' = 1 \\ g' = e^{-x} & & g = -e^{-x} \end{array} \right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x} \mathrm{dx} = e^{-x} \left(-x - 1 \right)$$

ונקבל ש

$$z(x) = e^x \left(C - \int x e^{-x} \mathrm{dx} \right) = e^x \left(C - e^{-x} \left(-x - 1 \right) \right) = e^x C + (x+1)$$

או

$$y(x) = z^{-1} = \frac{1}{e^x C + (x+1)}$$

נציב תנאי התחלה

$$\frac{1}{2} = y(0) = \frac{1}{e^0 C + (0+1)} = \frac{1}{C+1}$$

לכן $C+1=2$ ו $C=1$. התשובה הסופית היא

$$.y(x)=\frac{1}{e^x+(x+1)}$$

22. מצאו פתרון למד"ר $2xyy'=y^2-1$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=2$.

פתרון: נחלק ב x, y^2-1 לקבל:

$$\frac{2y}{y^2-1}y'=\frac{1}{x}$$

או בכתיב שקול

$$\frac{2y}{y^2-1}\mathrm{dy}=\frac{1}{x}\mathrm{dx}$$

שהינה מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו. נשתמש בשברים חלקים: קיימים A,B קבועים המקיימים

$$\frac{2y}{y^2-1}=\frac{2y}{(y-1)(y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1}$$

נמצא אותם. נכפיל ב y^2-1 ונשווה: $2y=A(y+1)+B(y-1)$ הצבה של $y=1$ תתן $2=2A$ ולכן $A=1$. הצבה של $y=-1$ תתן $-2=-2B$ ולכן $B=1$. מכאן ש

$$\int\frac{2y}{y^2-1}\mathrm{dy}=\int\left(\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}\right)\mathrm{dy}=\ln|y-1|+\ln|y+1|=\ln\left|y^2-1\right|$$

ונוכל להמשיך מהשיוויון $\frac{2y}{y^2-1}\mathrm{dy}=\frac{1}{x}\mathrm{dx}$ לקבל:

$$\ln\left|y^2-1\right|=\ln|x|+C$$

ולכן

$$\left|y^2-1\right|=|x|\,e^C$$

$$y^2-1=\pm xe^C$$

$$.y = \pm\sqrt{1 \pm xe^C}$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 2$

$$2 = y(1) = \pm\sqrt{1 \pm e^C}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס (שלפני השורש) ובנוסף

$$4 = 1 \pm e^C$$

$$e^C = \pm 3$$

לכן צריך את הפלוס ולקבל ש $C = \ln(3)$. סה"כ הפתרון

$$.y = \sqrt{1 + xe^{\ln(3)}} = \sqrt{1 + 3x}$$

23. מסה של $m = 2\text{kg}$ מחוברת לקפיץ בעל קבוע קפיץ k על משטח חסר חיכוך. כמו כן נתון כי ברגע $t = 0$ המסה הייתה ממוקמת כך שהקפיץ היה רפוי, אך מהירותה של המסה לא הייתה אפס. לבסוף, נתון כי הרגע הבא בו המסה חזרה למיקום בו הקפיץ רפוי הוא $t = \frac{\pi}{2}$.

(א) מצאו את קבוע הקפיץ k.

פתרון: נסמן מיקום המסה ביחס לנקודת הריפיון ב y. בפרט $y(0) = 0$. הכיוון החיובי לכיוון המהירות ההתחלתית v_0 (ששונה מאפס). הכח הפועל על המסה הוא ky בכיוון המנוגד למיקום ולכן הכח הוא $-ky$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-ky = ma = 2a$$

או $-ky = 2y''$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). נעביר אגף ונחלק ב 2

$$y'' + \frac{k}{2}y = 0$$

ונקבל מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים. הפולינום האופייני שלה הוא

$$p(x) = x^2 + \frac{k}{2}$$

והשורשים של הפולינום הם $\pm i\sqrt{\frac{k}{2}} = \pm\sqrt{-\frac{k}{2}}$ ולכן

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right), \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

בסיס למרחב הפתרונות. לכן

$$y(x) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

ונשתמש בנתוני השאלה $y(0)=0, y(\frac{\pi}{2})=0$ למצוא את הקבועים c_i. מהנתון הראשון, נקבל

$$0 = y(0) = c_1$$

ולכן $y(x) = c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$ ונשתמש בנתון השני:

$$0 = y(\frac{\pi}{2}) = c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

לכן $c_2 = 0$ או $\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0$. לא ייתכן כי $c_2 = 0$ שהרי כי אז $y \equiv 0$ וגם הנגזרת $y' \equiv 0$ בפרט $y'(0) = 0$ בניגוד לנתון שהמהירות ההתחלתית שונה מאפס. לכן $\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ולכן קיים N שלם כך ש $\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = N\pi$ לכן $k = 8N^2$. כיוון ש $t = \frac{\pi}{2}$ הוא הזמן הראשון אחרי $t = 0$ שבו $y(t) = 0$ נסיק כי $N = 1$ (ואז $y(\frac{\pi}{2}) = c_2\sin(\pi)$, אם $N > 1$ אזי היתה נקודה זמן לפני $\frac{\pi}{2}$ בה $y(t) = c_2\sin(\pi)$ בסתירה לנתון). לכן

$$k = 8$$

ו

$$y(x) = c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right) = c_2\sin\left(\sqrt{\frac{8}{2}}x\right) = c_2\sin(2x)$$

כעת נגזור

$$y' = 2c_2\cos(2x)$$

ומתקיים כי

$$v_0 = y'(0) = 2c_2$$

ולכן $c_2 = \frac{v_0}{2}$. מכאן ש

$$.y(x) = c_2 \sin(2x) = \frac{v_0}{2} \sin(2x)$$

(ב) מצאו את גודל מהירות המסה ברגע $t = 0$, אם ברגע $t = \frac{\pi}{4}$ המסה הייתה במרחק מטר אחד מנקודת הרפיון.

פתרון: בסעיף הקודם ראינו ש $y(x) = \frac{v_0}{2} \sin(2x)$ ונתון ש

$$1 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0}{2}$$

ולכן

$$v_0 = 2$$

שזה המהירות ההתחלתית. הערה כיוון ש $\frac{\pi}{2}$ זה הזמן הראשון בו המסה חוזרת לנקודת הריפיון אז בזמן $\frac{\pi}{4}$ המסה נעה בכיוון המהירות ההתחלתית שהגדרנו אותה לכיוון החיובי ולכן $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ולא $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.