# תרגילים ממבחנים של אחרים

מדעי המח תשפג מועד א

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = \frac{2x}{y+x^2y}$ המקיים $y(0) = -2$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון.

$$y' = \frac{2x}{y + x^2y} = \frac{2x}{y\left(1 + x^2\right)}$$

ולכן $yy' = \frac{2x}{(1+x^2)}$. זוהי מדר פרידה ובכתיב אחר:

$$y\mathrm{dy} = \frac{2x}{(1 + x^2)}\mathrm{dx}$$

ונעשה אינטגרלים לשני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו).

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left(1 + x^2\right) + C$$

ולכן

$$y = \pm\sqrt{2\ln\left(1 + x^2\right) + C}$$

(זה לא אותו $C$ ממקודם). נציב תנאי התחלה

$$-2 = y(0) = -\sqrt{2\ln\left(1 + 0^2\right) + C}$$

(חייבים לבחור את הפתרון עם המינוס) ואז

$$4 = C$$

ולכן הפתרון הסופי הוא

$$y=-\sqrt{2\ln\left(1+x^2\right)+4}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\left(x+y^2\right)\mathrm{dx}-2xy\mathrm{dy}=0$ המקיים $y(1)=1$.

פתרון: נבדוק אם המד"ר מדוייקת. נסמן

$$P\left(x,y\right)=x+y^2$$
$$Q\left(x,y\right)=-2xy$$

ואז

$$P_y=2y\quad Q_x=-2y$$

ולכן היא אינה מדויקת. נדייק אותו בעזרת

$$\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}\mathrm{dx}}=e^{\int\frac{2y+2y}{-2xy}\mathrm{dx}}=e^{-2\int\frac{1}{x}\mathrm{dx}}=e^{-2\ln(x)}=x^{-2}$$

כלומר: נסתכל על המד"ר השקולה שכעת מדויקת:

$$\frac{\left(x+y^2\right)}{x^2}\mathrm{dx}-\frac{2y}{x}\mathrm{dy}$$

ונגדיר מחדש

$$P\left(x,y\right)=\frac{x+y^2}{x^2}$$
$$Q\left(x,y\right)=-\frac{2y}{x}$$

וכעת נגדיר

$$U\left(x,y\right)=\int Q\left(x,y\right)\mathrm{dy}=-\frac{y^2}{x}+c(x)$$

ונמצא את $c(x)$. כיוון שצריך $U_x=P$, נשווה בניהם:

$$U_x=\frac{y^2}{x^2}+c'(x)=\frac{x+y^2}{x^2}$$

לכן

$$c'(x)=\frac{x+y^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{x}$$

ולכן $c(x)=\ln|x|$. מכאן ש $U(x,y)=C$ או

$$-\frac{y^2}{x}+\ln|x|=C$$

ולכן

$$\pm\sqrt{x\left(\ln|x|+C\right)}=y$$

ונציב תנאי התחלה.

$$1=y(1)=\pm\sqrt{1\left(\ln|1|+C\right)}$$

ולכן צריך לבחור את הפתרון החיובי ובנוסף $C=1$. לסיכום:

$$y=\sqrt{x\left(\ln|x|+1\right)}.$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y''-3y'+2y=e^x$ המקיים $y(0)=2,y'(0)=2$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y''-3y'+2y=0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

בעל שורשים $1,2$ ולכן $e^x,e^{2x}$ בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x)=e^x$ שמתאים ל $1$ שהינו שורש של הפולינום האופייני, ננחש פתרון מהצורה $y_p=\alpha xe^x$. מתקיים

$$y_p'=\alpha(1+x)e^x$$
$$y_p''=\alpha(2+x)e^x$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned} e^x &= \alpha(2+x)e^x - 3\alpha(1+x)e^x + 2\alpha x e^x \\ &= [(2+x) - 3(1+x) + 2x]\,\alpha e^x \\ &= -\alpha e^x \end{aligned}$$

ונקבל $\alpha = -1$. לסיכום:

$$y_p = -xe^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = -xe^x + C_1e^x + C_2e^{2x}$$

ו

$$y' = -(1+x)e^x + C_1e^x + 2C_2e^{2x}$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$2 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$2 = y'(0) = -1 + C_1 + 2C_2$$

ולכן $C_1 = 2 - C_2$ ו $C_1 = 3 - 2C_2$. מכאן ש $3 - 2C_2 = 2 - C_2$ ולכן $C_2 = 1$ ואז $C_1 = 2 - 1 = 1$. לסיכום:

$$.y = -xe^x + e^x + e^{2x}$$

4. כדור בעל מסה $m = 1\text{kg}$ נעזב במהירות התחלתית אפס. מה תהיה מהירות הכדור לאחר 2 שניות כאשר: (בשתי הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$).

(א) הכח היחיד הפועל על הכדור הוא כח המשיכה $mg$.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מטה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון החיובי. לכן הכח הוא $g$.

מהשיוון $F = ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל על הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$g = ma = a$$

או $g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע $c$. נתון כי $y'(0) = 0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0 = y'(0) = g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = gt$. המהירות לאחר 2 שניות היא $y'(2) = g \cdot 2 = 20$ (מטר לשניה).

(ב) הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה $mg$ וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות $v$

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מטה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון החיובי. בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של $v$ לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $g - v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל כל הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$g - v = ma = a$$

או $g - y'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + z = g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = 1, b(x) = g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)} \left( C + \int b(x) e^{A(x)} \mathrm{dx} \right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = x$ ונציב

$$e^{-x} \left( C + \int g e^{x} \mathrm{dx} \right) = e^{-x} \left( C + g e^{bx} \right) = e^{-x} C + g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-t} C + g$$

או

$$.y'(t)=e^{-t}C+g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=0$ (אין מהירות התחלתית) לכן

$$0=y'(0)=e^{-0}C+g=C+g$$

ומכאן $C=-g$. מכאן שהמהירות אחרי $2$ שניות היא

$$.y'(2)=e^{-2}\cdot(-g)+g=g\left(1-e^{-2}\right)$$

מדעי המח תשפג מועד ב

5. מצאו פתרון למד"ר $(xy'-1)\ln(x)=2y$ המקיים $y(e)=0$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון. נעביר אגפים $y'x\ln(x)-2y=\ln(x)$. נחלק ב $x\ln(x)$ לקבל

$$y'-\frac{2}{x\ln(x)}y=\frac{1}{x}$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $b(x)=\frac{1}{x}$, $a(x)=-\frac{2}{x\ln(x)}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב $A(x)$:

$$A(x)=\int-\frac{2}{x\ln(x)}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{c}t=\ln(x)\\ \mathrm{dt}=\frac{1}{x}\mathrm{dx}\end{array}\right\}=-2\int\frac{1}{t}\mathrm{dt}=-2\ln|\ln(x)|$$

ואז נציב

$$e^{2\ln|\ln(x)|}\left(C+\int\frac{1}{x}e^{-2\ln|\ln(x)|}\mathrm{dx}\right)=\ln^2(x)\left(C+\int\frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{dx}\right)$$

נחשב

$$\int\frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{c}t=\ln(x)\\ \mathrm{dt}=\frac{1}{x}\mathrm{dx}\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t^2}\mathrm{dt}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{\ln(x)}$$

ולכן, פתרון כללי הוא

$$\begin{aligned} y(x) &= \ln^2(x)\left(C + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{dx}\right) \\ &= \ln^2(x)C - \ln(x) \end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה $y(e) = 0$ למצוא את הקבוע $C$.

$$0 = y(e) = \ln^2(e)C - \ln(e) = C - 1$$

לכן $C = 1$ והפתרון הוא

$$y(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$$

6. מצאו פתרון למד"ר $\left(1 + y^2\sin(2x)\right)\mathrm{dx} - 2y\cos^2(x)\mathrm{dy} = 0$ המקיים $y(0) = -2$.

פתרון: נבדוק אם המד"ר מדוייקת. נסמן

$$\begin{aligned} P\left(x,y\right) &= 1 + y^2\sin(2x) \\ Q\left(x,y\right) &= -2y\cos^2(x) \end{aligned}$$

ואז

$$P_y = 2y\sin(2x) \quad Q_x = 4y\cos(x)\sin(x) = 2y\sin(2x)$$

ולכן היא מדויקת. כעת נגדיר

$$U\left(x,y\right) = \int Q\left(x,y\right)\mathrm{dy} = -y^2\cos^2(x) + c(x)$$

ונמצא את $c(x)$. כיוון שצריך $U_x = P$, נשווה בניהם:

$$U_x = 2y^2\cos(x)\sin(x) + c'(x) = 1 + y^2\sin(2x)$$

$$y^2\sin(2x) + c'(x) = 1 + y^2\sin(2x)$$

לכן $c'(x)=1$ ומכאן ש $c(x)=x$. סה"כ נקבל ש $U(x,y)=C$ או

$$-y^2\cos^2(x)+x=C$$

ולכן

$$\pm\sqrt{\frac{x+C}{\cos^2(x)}}=y$$

ונציב תנאי התחלה.

$$-2=y(0)=\pm\sqrt{\frac{0+C}{\cos^2(0)}}=\pm\sqrt{C}$$

ולכן צריך לבחור את הפתרון החיובי ובנוסף $C=4$. לסיכום:

$$y=-\sqrt{\frac{x+4}{\cos^2(x)}}.$$

7. מצאו פתרון למד"ר $y''-2y'+y=xe^{2x}$ המקיים $y(0)=0, y'(0)=0$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y''-2y'+y=0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן $e^x, xe^x$ בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h=C_1e^x+C_2xe^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x)=xe^{2x}$ שהוא פולינום מדרגה 1 שמוכפל ב $e^{2x}$ (שמתאים ל 2 שהוא לא שורש של הפולינום האופייני), ננחש פתרון מהצורה $y_p=(\alpha_0+\alpha_1x)e^{2x}$. מתקיים

$$y_p'=[2(\alpha_0+\alpha_1x)+\alpha_1]e^{2x}$$
$$y_p''=[4(\alpha_0+\alpha_1x)+2\alpha_1+2\alpha_1]e^{2x}=4(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1x)e^{2x}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned} xe^{2x} &= 4\left(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1 x\right)e^{2x} - 2\left[2\left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)+\alpha_1\right]e^{2x} + \left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)e^{2x} \\ &= \left[4\left(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1 x\right) - 2\left[2\left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)+\alpha_1\right] + \left(\alpha_0+\alpha_1 x\right)\right]e^{2x} \\ &= \left[\left(2\alpha_1+\alpha_0\right)+\alpha_1 x\right]e^{2x} \end{aligned}$$

ונקבל

$$x = \left(2\alpha_1+\alpha_0\right)+\alpha_1 x$$

ולכן $\alpha_1 = 1$ ו $2\alpha_1+\alpha_0 = 0$. ולכן $\alpha_1 = 1, \alpha_0 = -2$. לסיכום:

$$y_p = (-2+x)\, e^{2x}$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = (-2+x)\, e^{2x} + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

ו

$$y' = (-3+2x)\, e^{2x} + C_1 e^x + C_2\,(x+1)\, e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$0 = y(0) = -2 + C_1$$

$$0 = y'(0) = -3 + C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 2$ ו $C_2 = 3 - C_1 = 1$. לסיכום:

$$.y = (-2+x)\, e^{2x} + 2e^x + xe^x$$

8. כדור בעל מסה $m = 1\text{kg}$ נבעט לכיוון מעלה במהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. מה יהיה גובה הכדור ברגע שהמהירות הרגעית שלו תתאפס כאשר: (בשני הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$.)

(א) הכח היחיד הפועל על הכדור הוא כח המשיכה $mg$.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב $0$ והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל על הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g=ma=a$$

או $g=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t)=-gt+c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע $c$. נתון כי $y'(0)=20$ (המהירות ההתחלתית $20$ כלפי מעלה שהוא הכיוון החיובי) לכן

$$20=y'(0)=-g\cdot 0+c=c$$

ולכן $y'(t)=-gt+20$. המהירות תתאפס כאשר $y'(t)=0$ או

$$gt=20$$

כלומר לאחר $t=\frac{20}{g}=2$ שניות. המיקום $y(t)$ שווה ל

$$y(t)=\int y'=-g\frac{t^2}{2}+20t+C$$

ומתנאי ההתחלה $y(0)=0$ נקבל

$$0=C$$

לכן $y(t)=-g\frac{t^2}{2}+20t$ והגובה שלו לאחר $2$ שניות (הזמן שהמהירות מתאפסת) הוא

$$.y(2)=-g\frac{4}{2}+40=20$$

(ב) הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה $mg$ וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות $v$.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב $0$ והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי (כלומר $-g$). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של $v$ לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל

הוא $-g-v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל כל הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-v=ma=a$$

או $-g-y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+z=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=1,b(x)=-g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\text{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C-\int ge^{x}\text{dx}\right)=e^{-x}\left(C-ge^{bx}\right)=e^{-x}C-g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-t}C-g$$

או

$$.y'(t)=e^{-t}C-g$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה שהוא החיובי) לכן

$$20=y'(0)=e^{-0}C-g=C-g$$

ומכאן $C=20+g=30$. קיבלנו $y'(t)=30e^{-t}-g$ והמהירות מתאפס כאשר $y'(t)=0$ או

$$g=30e^{-t}$$

$$e^{-t}=\frac{1}{3}$$

$$-t=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

ולכן $t=\ln(3)$. המיקום הוא

$$y(t)=\int y'=\int\left(30e^{-t}-g\right)=-30e^{-t}-gt+C$$

ותנאי ההתחלה $y(0)=0$ יתן

$$0=-30+C$$

כלומר $C=30$ ו $y(t)=-30e^{-t}-gt+30$. הגובה בזמן $t=\ln(3)$ בו המהירות מתאפסת הוא

$$\begin{aligned}y\left(\ln(3)\right)&=-30e^{-(\ln(3))}-g\left(\ln(3)\right)+30\\&=-30\frac{1}{3}-10\ln(3)+30\\&=20-10\ln(3)\end{aligned}$$

הנדסה תשפג מועד ב

9. מצאו פתרון למד"ר $ye^x=-1+y'(e^x+1)$ המקיים $y(0)=0$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון. נעביר אגפים $(e^x+1)\,y'+ye^x=-1$. נחלק ב $e^x+1$ לקבל

$$y'+y\frac{e^x}{(e^x+1)}=-\frac{1}{(e^x+1)}$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $a(x)=\frac{e^x}{e^x+1},b(x)=-\frac{1}{e^x+1}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב $A(x)$:

$$A(x)=\int\frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{c}t=e^x\\\mathrm{dt}=e^x\mathrm{dx}\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t+1}\mathrm{dt}=\ln\left(e^x+1\right)$$

ואז נציב

$$e^{-\ln(e^x+1)}\left(C-\int\frac{1}{e^x+1}e^{\ln(e^x+1)}\mathrm{dx}\right)=\frac{1}{e^x+1}\left(C-\int 1\mathrm{dx}\right)=$$

$$= \frac{C - x}{e^x + 1}$$

ולכן, פתרון כללי הוא

$$y(x) = \frac{C - x}{e^x + 1}$$

נציב תנאי התחלה $y(0) = 0$ למצוא את הקבוע $C$.

$$0 = y(0) = \frac{C}{1 + 1}$$

לכן $C = 0$ והפתרון הוא

$$y(x) = \frac{-x}{e^x + 1}$$

10. מצאו שני פתרונות למד"ר $(x + xy)\, y' = \frac{1}{2}$ המקיימים $y\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

פתרון: נוציא $x$:

$$(1 + y)\, y' = \frac{1}{2}$$

ונחלק $x$ ורשום בצורה שקולה

$$(1 + y)\, \mathrm{dy} = \frac{\mathrm{dx}}{2x}$$

לקבל מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו):

$$y + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \ln |x| + C$$

נעביר אגף ו

$$\frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2} \ln |x| + C = 0$$

($C$ קבוע כל שהוא. לא אותו אחד ממקודם). לכן

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} \ln |x| + C\right)} = -1 \pm \sqrt{1 + \ln |x| + C}$$

ויש שתי פתרונות (שמתאימים ל $\pm$). נציב תנאי התחלה $y\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ בכל אחד לקבל פתרון פרטי. הראשון:

$$y_1(x) = -1 + \sqrt{1 + \ln|x| + C}$$

ואז

$$-1 = y_1\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \sqrt{1 - 1 + C}$$

ולכן $\sqrt{C} = 0$. מכאן ש $C = 0$. הפתרון השני:

$$y_2(x) = -1 - \sqrt{1 + \ln|x| + C}$$

ואז

$$-1 = y_2\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - \sqrt{1 - 1 + C}$$

ולכן $C = 0$ כמו מקודם. לסיכום, שני הפתרונות הם:

$$y_1(x) = -1 + \sqrt{1 + \ln|x|}$$

$$y_2(x) = -1 - \sqrt{1 + \ln|x|}$$

11. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = 2e^x$ המקיים $y(0) = 2, y'(0) = 5$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y'' - 2y' + y = 0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן $e^x, xe^x$ בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x) = 2e^x$ שהוא פולינום מדרגה 0 שמוכפל ב $e^x$ (שמתאים ל

1 שהוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2, ננחש פתרון מהצורה $y_p = \alpha x^2 e^x$. מתקיים

$$y_p' = \alpha\left(x^2+2x\right)e^x$$
$$y_p'' = \alpha\left(x^2+4x+2\right)e^x$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned}2e^x &= \alpha\left(x^2+4x+2\right)e^x - 2\alpha\left(x^2+2x\right)e^x + \alpha x^2 e^x \\ &= \left[\left(x^2+4x+2\right) - 2\left(x^2+2x\right) + x^2\right]\alpha e^x \\ &= 2\alpha e^x\end{aligned}$$

ונקבל $\alpha = 1$ והפתרון הפרטי

$$y_p = x^2 e^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

ו

$$y' = \left(x^2+2x\right)e^x + C_1 e^x + C_2(x+1)e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$2 = y(0) = C_1$$

$$5 = y'(0) = C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 2$ ו $C_2 = 5 - C_1 = 3$. לסיכום:

$$y = x^2 e^x + 2e^x + 3xe^x.$$

12. כדור בעל מסה $m = 2$ נזרק כלפי מעלה במהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. הניחו כי קבוע הכבידה של כדור הארץ הוא $g = 10$ מטר לשנייה בריבוע.

(א) בהנחה שכוח המשיכה הוא הכוח היחיד הפועל על הכדור, חשבו את הזמן בו הכדור יגיע לשיא הגובה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב $0$ והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1\cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$.
מהשיוון $F = ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל על הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע $c$. נתון כי $y'(0) = 20$ (המהירות ההתחלתית $20$ כלפי מעלה שהוא הכיוון החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = -g\cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt + 20$. בגובה המקסימאלי, המהירות תתאפס, וזה קורה כאשר $y'(t) = 0$ או

$$gt = 20$$

כלומר לאחר $t = \frac{20}{g} = 2$ שניות.

(ב) בהנחה שבנוסף לכוח המשיכה, כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל המהירות, מה תהיה מהירות הכדור ומה יהיה כיוונה לאחר שנייה אחת?

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב $0$ והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1\cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (כלומר $-g$). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $\frac{1}{2}v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של $v$ לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-\frac{1}{2}v$. לכן הכח הכולל הוא $-g-\frac{1}{2}v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל כל הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g - \frac{1}{2}v = ma = a$$

או $-g - \frac{1}{2}y'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + \frac{1}{2}z = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=\frac{1}{2},b(x)=-g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=\frac{1}{2}x$ ונציב

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(C-\int ge^{\frac{1}{2}x}\mathrm{dx}\right)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C-2ge^{\frac{1}{2}x}\right)=e^{-\frac{1}{2}x}C-2g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-\frac{1}{2}x}C-2g$$

או

$$y'(t)=e^{-\frac{1}{2}x}C-2g.$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה שהוא החיובי) לכן

$$20=y'(0)=e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}C-2g=C-2g$$

ומכאן $C=20+2g=40$. קיבלנו $y'(t)=40e^{-\frac{1}{2}x}-2g$ והמהירות אחרי שניה המהירות תהיה

$$y'(1)=40e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}-2g=\frac{40}{\sqrt{e}}-20\approx 4.26$$

בכיוון החיובי (כלומר כלפי מעלה).

$$x=2\ln(2)$$

הנדסה תשפג בוחן

13. מצאו פתרון למד"ר $y'=x\left(y^3-y\right)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

פתרון: נחלק

$$\frac{y'}{(y^3-y)}=x$$

או

$$\frac{\mathrm{dy}}{(y^3-y)}=x\mathrm{dx}$$

שזוהי מד"ר פרידה. נעשה אינטגל על כל אחד מהאגפים, לפי המשתנה שלו:

$$\int\frac{\mathrm{dy}}{(y^3-y)}=\frac{x^2}{2}+C$$

ונחשב $\int\frac{\mathrm{dy}}{(y^3-y)}$ על ידי פירוק לשברים חלקיים: קיימים קבועים $A,B,C$ כך ש

$$\frac{1}{(y^3-y)}=\frac{1}{y\left(y^2-1\right)}=\frac{1}{y\left(y-1\right)\left(y+1\right)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}+\frac{C}{y+1}$$

נמצא אותם. נעשה מכנה משותף ונשווה מונים:

$$1=A\left(y-1\right)\left(y+1\right)+By\left(y+1\right)+Cy\left(y-1\right)$$

נציב $y=0$ לקבל $1=-A$ ולכן $A=-1$. נציב $y=1$ לקבל $1=2B$ ולכן $B=\frac{1}{2}$. נציב $y=-1$ לקבל $1=2C$ ולכן $C=\frac{1}{2}$. לכן

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{dy}}{(y^3-y)}&=\int\left(\frac{-1}{y}+\frac{\frac{1}{2}}{y-1}+\frac{\frac{1}{2}}{y+1}\right)\mathrm{dy}\\&=-\ln\left|y\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y+1\right|\\&=\ln\left|y\right|^{-1}+\ln\left|y-1\right|^{\frac{1}{2}}+\ln\left|y+1\right|^{\frac{1}{2}}\\&=\ln\left(\left|y\right|^{-1}\left|y-1\right|^{\frac{1}{2}}\left|y+1\right|^{\frac{1}{2}}\right)\\&=\ln\left(\frac{\sqrt{\left|y-1\right|\left|y+1\right|}}{\left|y\right|}\right)\\&=\ln\left(\sqrt{\frac{\left|y^2-1\right|}{\left|y^2\right|}}\right)\\&=\ln\left(\sqrt{\left|1-\frac{1}{y^2}\right|}\right)\end{aligned}$$

כעת נציב בשיויון $\int\frac{\mathrm{dy}}{(y^3-y)}=\frac{x^2}{2}+C$ ונבודד את $y$

$$\ln\left(\sqrt{\left|1-\frac{1}{y^2}\right|}\right)=\frac{x^2}{2}+C$$

$$\sqrt{\left|1-\frac{1}{y^2}\right|}=e^{\frac{x^2}{2}}e^C$$

$$\left|1-\frac{1}{y^2}\right|=e^{x^2}e^C$$

$$1-\frac{1}{y^2}=\pm e^{x^2}e^C$$

$$1\mp e^{x^2}e^C=\frac{1}{y^2}$$

$$y^2=\frac{1}{1\mp e^{x^2}e^C}$$

ולסיום:

$$y=\sqrt{\frac{1}{1\mp e^{x^2}e^C}}$$

נציב תנאי התחלה $y(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=y(0)=\frac{1}{\sqrt{1\mp e^C}}$$

$$\sqrt{1\mp e^C}=\sqrt{2}$$

$$1\mp e^C=2$$

$$\mp e^C=1$$

$$e^C=\pm 1$$

לכן צריך לקחת את הפלוס ואז

$$C=\ln(1)$$

ולסיכום:

$$.y(x)=\sqrt{\frac{1}{1+e^{x^2}e^{\ln(1)}}}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{x^2}}}$$

14. מצאו פתרון למד"ר $\left(1-\frac{y}{x}\right)y'=1-\frac{y}{x}-\frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נחלק ב $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ לקבל:

$$y'=1-\frac{e^x}{2x\left(1-\frac{y}{x}\right)}$$

$$y'=1-\frac{e^x}{2\left(x-y\right)}$$

נגדיר $z=x-y$ ואז $z'=1-y'$ ונציב:

$$1-z'=1-\frac{e^x}{2z}$$

$$\frac{e^x}{2z}=z'$$

$$e^x=2zz'$$

ובצורה שקולה

$$.e^x\mathrm{dx}=2z\mathrm{dz}$$

קיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^x+C=z^2$$

וקיבלנו

$$z=\pm\sqrt{e^x+C}$$

נחזור ל $y$:

$$.y = x - z = x \pm \sqrt{e^x + C}$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 0$

$$0 = y(1) = 1 \pm \sqrt{e + C}$$

$$\pm\sqrt{e + C} = -1$$

לכן צריך לקחת את הפתרון של המינוס. נמשיך לבודד את $C$

$$\sqrt{e + C} = 1$$

$$C = 1 - e$$

וסה"כ התשובה היא

$$.y(x) = x - \sqrt{e^x + 1 - e}$$

15. כדורגל בעל מסה של $m = 1\text{kg}$ נבעט כלפי מעלה מהרצפה במהירות התחלתית של $20\ m/sec$. הניחו כי כוח המשיכה הוא קבוע ושווה ל $mg$, כאשר $g$ קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ. הניחו כי $g = 10$. מצאו את גובה הכדור לאחר 2 שניות, במקרים הבאים:

(א) בהנחה שאין כוחות נוספים פרט לכוח המשיכה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב $0$ והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל על הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $-g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע $c$. נתון כי $y'(0)=20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$20=y'(0)=-g\cdot 0+c=c$$

ולכן $y'(t)=-gt+20$. המהירות לאחר 2 שניות היא $y'(2)=-g\cdot 2+20=0$ (מטר לשניה).

(ב) בהנחה שכוח התנגדות האוויר בכל רגע שווה בגודלו לגודל המהירות של הכדור.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot 10=10$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של $v$ לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-v$. לכן הכח הכולל הוא $-g-v$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל כל הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-v=ma=a$$

או $-g-y'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+z=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z'+a(x)z=b(x)$ (עבור $a(x)=1, b(x)=-g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x)=x$ ונציב

$$e^{-x}\left(C-\int ge^{x}\mathrm{dx}\right)=e^{-x}\left(C-ge^{x}\right)=e^{-x}C-g$$

לכן:

$$z(t)=e^{-t}C-g$$

או

$$y'(t)=e^{-t}C-g.$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0)=20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה, הכיוון החיובי) לכן

$$20=y'(0)=e^{-0}C-g=C-g$$

ומכאן $C = 20 + g$. מכאן שהמהירות אחרי 2 שניות היא

$$.y'(2) = e^{-2} \cdot (20 + g) - g = 30e^{-2} - 10 = -5.94$$

כלומר המהירות 5.94 כלפי מטה.

מתמטיקה תשפג מועד ב

16. מצאו פתרון למד"ר $x^2y' + xy + 1 = 0$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 0$.

פתרון: אחרי חילוק ב $x^2$ והעברת אגף נקבל

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$$

שהינה מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y' + a(x)y = b(x)$ עבור $a(x) = \frac{1}{x}, b(x) = -\frac{1}{x^2}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב

$$A(x) = \int a(x)\mathrm{dx} = \int \frac{1}{x}\mathrm{dx} = \ln|x|$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned} .y(t) &= e^{-\ln|x|}\left(C + \int -\frac{1}{x^2}e^{\ln|x|}\mathrm{dx}\right) \\ &= |x|^{-1}\left(C - \int \frac{1}{x^2}|x|\,\mathrm{dx}\right) \\ &= |x|^{-1}C - |x|^{-1}\int \frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx} \end{aligned}$$

כעת: עבור $x > 0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int \frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx} = x^{-1}\int \frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ועבור $x < 0$ נקבל

$$|x|^{-1}\int \frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx} = -x^{-1}\int \frac{-x}{x^2}\mathrm{dx} = x^{-1}\int \frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$$

ולכן נוכל להמשיך עם $x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}$. נמשיך:

$$\begin{aligned}y(x)&=|x|^{-1}C-|x|^{-1}\int\frac{|x|}{x^2}\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}C-x^{-1}\int\frac{x}{x^2}\mathrm{dx}\\&=|x|^{-1}C-x^{-1}\ln|x|\end{aligned}$$

ונציב תנאי התחלה $y(1)=0$.

$$0=y(1)=|1|^{-1}C-0=C$$

ולכן

$$y(x)=-x^{-1}\ln|x|.$$

17. מצאו פתרון למד"ר $\left(1-\frac{y}{x}\right)y'=1-\frac{y}{x}-\frac{e^x}{2x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$.

פתרון: נחלק ב $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ לקבל:

$$y'=1-\frac{e^x}{2x\left(1-\frac{y}{x}\right)}$$

$$y'=1-\frac{e^x}{2\left(x-y\right)}$$

נגדיר $z=x-y$ ואז $z'=1-y'$ ונציב:

$$1-z'=1-\frac{e^x}{2z}$$

$$\frac{e^x}{2z}=z'$$

$$e^x=2zz'$$

ובצורה שקולה

$$e^x\mathrm{dx}=2z\mathrm{dz}.$$

קיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$e^x + C = z^2$$

וקיבלנו

$$z = \pm\sqrt{e^x + C}$$

נחזור ל $y$:

$$y = x - z = x \pm \sqrt{e^x + C}.$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 0$

$$0 = y(1) = 1 \pm \sqrt{e + C}$$

$$\pm\sqrt{e + C} = -1$$

לכן צריך לקחת את הפתרון של המינוס. נמשיך לבודד את $C$

$$\sqrt{e + C} = 1$$

$$C = 1 - e$$

וסה"כ התשובה היא

$$y(x) = x - \sqrt{e^x + 1 - e}.$$

18. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = xe^x$ המקיים $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר ההומוגנית $y'' - 2y' + y = 0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

בעל שורש (כפול) $1$ ולכן $e^x, xe^x$ בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x) = xe^x$ שהוא פולינום מדרגה $1$ שמוכפל ב $e^x$ (שמתאים ל $1$ שהוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי $2$), ננחש פתרון מהצורה $y_p = (\alpha_0 + \alpha_1 x)\, x^2 e^x$. מתקיים

$$\begin{aligned}
y_p' &= \left((\alpha_0 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\,(\alpha_0 + \alpha_1 x) + \alpha_1 x^2\right) e^x \\
&= \left((\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\alpha_0\right) e^x \\
y_p'' &= \left((\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\alpha_0 + 2\alpha_0 + 2x\,(\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) + \alpha_1 x^2\right) e^x \\
&= \left((\alpha_0 + 4\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\,(2\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) + 2\alpha_0\right) e^x
\end{aligned}$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned}
xe^x &= (\alpha_0 + \alpha_1 x)\, x^2 e^x - 2\left((\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\alpha_0\right) e^x \\
&\quad + \left((\alpha_0 + 4\alpha_1 + \alpha_1 x)\, x^2 + 2x\,(2\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_1 x) + 2\alpha_0\right) e^x \\
&= [2\alpha_0 + 6\alpha_1 x]\, e^x
\end{aligned}$$

ונקבל $2\alpha_0 = 0, 6\alpha_1 = 1$. מכאן ש $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \frac{1}{6}$ והפתרון הפרטי הוא

$$y_p = \left(0 + \frac{1}{6}x\right) x^2 e^x = \frac{1}{6}x^3 e^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{6}x^3 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

ו

$$y' = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) e^x + C_1 e^x + C_2\,(x+1)\, e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$0 = y(0) = C_1$$

$$1 = y'(0) = C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 0$ ו $C_2 = 1 - C_1 = 1$. לסיכום:

$$.y = \frac{1}{6}x^3e^x + xe^x$$

19. כדורגל בעל מסה של $m = 2\text{kg}$ נזרק כלפי מעלה מגובה של $y_0 = 10m$ ומגיע לקרקע לאחר 2 שניות. כמו כן נתון כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל מהירות הכדור. לצורך הפשטות הניחו כי קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ הוא $g = 10$.

(א) מצאו את המהירות בה נזרק הכדור.

פתרון: נסמן מיקום הארץ ב $0$ והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0) = 10$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 2 \cdot 10 = 20$ וכיוונו לכיוון השלילי (מטה). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $\frac{1}{2}v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של $v$ לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-\frac{1}{2}v$. לכן הכח הכולל הוא $-2g - \frac{1}{2}v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל כל הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-2g - \frac{1}{2}v = ma = a$$

או $-2g - \frac{1}{2}y'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונכפול ב $2$ ונקבל

$$z' + 2z = -4g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = 2, b(x) = -4g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\text{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = 2x$ ונציב

$$e^{-2x}\left(C - \int 4ge^{2x}\text{dx}\right) = e^{-2x}\left(C - 2ge^{2x}\right) = e^{-2x}C - 2g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-2t}C - 2g$$

או

$$.y'(t) = e^{-2t}C - 2g$$

מכאן, ע"י אינטגרל פשוט, נקבל

$$.y(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}C - 2gt + D$$

כעת נציב נתוני השאלה. נתון כי $y(0) = 10$ ו $y(2) = 0$. נקבל את המשוואות

$$\begin{cases} 10 = y(0) = -\frac{1}{2}C + D \\ 0 = y(2) = -\frac{1}{2}e^{-4}C - 4g + D \end{cases}$$

ומהמשוואה הראשונה נקבל $D = 10 + \frac{1}{2}C$. נציב במשוואה השניה

$$0 = -\frac{1}{2}e^{-4}C - 4g + D = -\frac{1}{2}e^{-4}C - 4g + 10 + \frac{1}{2}C =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}\right)C - 30$$

לכן $C = \frac{30}{\left(-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{60}{(1-e^{-4})}$ ו $D = 10 + \frac{1}{2}C = 10 + \frac{1}{2}\frac{60}{(1-e^{-4})} = 10 + \frac{30}{(1-e^{-4})}$. נחזור ל $y'$ ונציב את $C$ שמצאנו

$$y'(t) = e^{-2t}\frac{60}{(1-e^{-4})} - 2g$$

ונקבל שהמהירות ההתחלתית היא

$$y'(0) = \frac{60}{(1-e^{-4})} - 2g = \frac{60}{(1-e^{-4})} - 20$$

(ב) מצאו את תאוצת הכדור ברגע הפגיעה בקרקע.

פתרון: בסעיף הקודם ראינו ש

$$y'(t) = e^{-2t}\frac{60}{(1-e^{-4})} - 2g$$

ולכן פונקצית התאוצה היא

$$.y''(t) = e^{-2t} \cdot \frac{-120}{(1-e^{-4})}$$

הכדור פוגע בקרקע לאחר 2 שניות ולכן התאוצה אז היא

$$y''(2) = e^{-4} \cdot \frac{-120}{(1-e^{-4})} = \frac{-120}{(e^{4}-1)}$$

מתמטיקה תשפג מועד א

20. מצאו פתרון למד"ר $2xyy' = y^2 - 1$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(1) = 2$.

פתרון: נחלק ב $x$, $y^2-1$ לקבל:

$$\frac{2y}{y^2-1}y' = \frac{1}{x}$$

או בכתיב שקול

$$\frac{2y}{y^2-1}\text{dy} = \frac{1}{x}\text{dx}$$

שהינה מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו. נשתמש בשברים חלקים: קיימים $A, B$ קבועים המקיימים

$$\frac{2y}{y^2-1} = \frac{2y}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}$$

נמצא אותם. נכפיל ב $y^2-1$ ונשווה: $2y = A(y+1) + B(y-1)$ הצבה של $y=1$ תתן $2 = 2A$ ולכן $A = 1$. הצבה של $y = -1$ תתן $-2 = -2B$ ולכן $B = 1$. מכאן ש

$$\int \frac{2y}{y^2-1}\text{dy} = \int \left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1}\right)\text{dy} = \ln|y-1| + \ln|y+1| = \ln\left|y^2-1\right|$$

ונוכל להמשיך מהשיוויון $\frac{2y}{y^2-1}\text{dy} = \frac{1}{x}\text{dx}$ לקבל:

$$\ln\left|y^2-1\right| = \ln|x| + C$$

ולכן

$$\left|y^2-1\right| = |x|\, e^C$$

$$y^2-1 = \pm x e^C$$

$$.y = \pm\sqrt{1 \pm x e^C}$$

נציב תנאי התחלה $y(1) = 2$

$$2 = y(1) = \pm\sqrt{1 \pm e^C}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס (שלפני השורש) ובנוסף

$$4 = 1 \pm e^C$$

$$e^C = \pm 3$$

לכן צריך את הפלוס ולקבל ש $C = \ln(3)$. סה"כ הפתרון

$$.y = \sqrt{1 + x e^{\ln(3)}} = \sqrt{1+3x}$$

21. מסה של $m = 2\text{kg}$ מחוברת לקפיץ בעל קבוע קפיץ $k$ על משטח חסר חיכוך. כמו כן נתון כי ברגע $t=0$ המסה הייתה ממוקמת כך שהקפיץ היה רפוי, אך מהירותה של המסה לא הייתה אפס. לבסוף, נתון כי הרגע הבא בו המסה חזרה למיקום בו הקפיץ רפוי הוא $.t = \frac{\pi}{2}$

(א) מצאו את קבוע הקפיץ $.k$

פתרון: נסמן מיקום המסה ביחס לנקודת הריפיון ב $y$. בפרט $y(0) = 0$. הכיוון החיובי לכיוון המהירות ההתחלתית $v_0$ (ששונה מאפס). הכח הפועל על המסה הוא $ky$ בכיוון המנוגד למיקום ולכן הכח הוא $-ky$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל כל הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-ky = ma = 2a$$

או $-ky = 2y''$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). נעביר אגף ונחלק ב 2

$$y'' + \frac{k}{2}y = 0$$

ונקבל מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים. הפולינום האופייני שלה הוא

$$p(x) = x^2 + \frac{k}{2}$$

והשורשים של הפולינום הם $\pm\sqrt{-\frac{k}{2}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{2}}$ ולכן

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right), \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

בסיס למרחב הפתרונות. לכן

$$y(x) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$$

ונשתמש בנתוני השאלה $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$ למצוא את הקבועים $c_i$. מהנתון הראשון, נקבל

$$0 = y(0) = c_1$$

ולכן $y(x) = c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right)$ ונשתמש בנתון השני:

$$0 = y(\frac{\pi}{2}) = c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

לכן $c_2 = 0$ או $\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0$. לא ייתכן כי $c_2 = 0$ שהרי כי אז $y \equiv 0$ וגם הנגזרת $y' \equiv 0$ בפרט $y'(0) = 0$ בניגוד לנתון שהמהירות ההתחלתית שונה מאפס. לכן $\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ולכן קיים $N$ שלם כך ש $\sqrt{\frac{k}{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = N\pi$ לכן $k = 8N^2$. כיוון ש $t = \frac{\pi}{2}$ הוא הזמן הראשון אחרי $t = 0$ שבו $y(t) = 0$ נסיק כי $N = 1$ (ואז $y(\frac{\pi}{2}) = c_2\sin(\pi)$, אם $N > 1$ אזי היתה נקודה זמן לפני $\frac{\pi}{2}$ בה $y(t) = c_2\sin(\pi)$ בסתירה לנתון). לכן

$$k = 8$$

ו

$$y(x) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{2}}x\right) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{8}{2}}x\right) = c_2 \sin(2x)$$

כעת נגזור

$$y' = 2c_2 \cos(2x)$$

ומתקיים כי

$$v_0 = y'(0) = 2c_2$$

ולכן $c_2 = \frac{v_0}{2}$. מכאן ש

$$.y(x) = c_2 \sin(2x) = \frac{v_0}{2} \sin(2x)$$

(ב) מצאו את גודל מהירות המסה ברגע $t = 0$, אם ברגע $t = \frac{\pi}{4}$ המסה הייתה במרחק מטר אחד מנקודת הרפיון.

פתרון: בסעיף הקודם ראינו ש $y(x) = \frac{v_0}{2} \sin(2x)$ ונתון ש

$$1 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0}{2}$$

ולכן

$$v_0 = 2$$

שזה המהירות ההתחלתית. הערה כיוון ש $\frac{\pi}{2}$ זה הזמן הראשון בו המסה חוזרת לנקודת הריפיון אז בזמן $\frac{\pi}{4}$ המסה נעה בכיוון המהירות ההתחלתית שהגדרנו אותה לכיוון החיובי ולכן $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ולא $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.