מבנים אלגבריים*

תרגיל בית 4†

תזכורות ומושגים

- סדר של איבר g בחבורה G הוא המספר הטבעי המינימלי n המקיים $g^n = e$. אם אין טבעי שכזה, אז הסדר הוא אינסוף.
- ת"ח (=תת חבורה) H של חבורה G היא תת־קבוצה לא ריקה של G כך שביחס לפעולה של G, H היא חבורה בפני עצמה. מסמנים זאת על ידי $H \leq G$.
- לכל חבורה G מתקיים $G \leq G$ וגם $\{e\} \leq G$. לתת־חבורות אלו קוראים ת"ח טריוויאליות של G.
- קריטריון לת"ח: תהי G חבורה, ותהי $\varnothing \neq H \subseteq G$. $H \leq G$ א.ס.ם. לכל $g,h \in H$ מתקיים $gh \in H$ וגם $g^{-1} \in H$.

שאלה 1 נביט בחבורה הציקלית הנוצרת על ידי $\mathrm{cis}10^\circ = \cos 10^\circ + i\sin 10^\circ$ בתוך החבורה הכפלית $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. מה הסדר של החבורה $\langle \mathrm{cis}10^\circ \rangle$?

רמז השתמשו במשפט דה־מואבר.

שאלה 2 מצאו את כל התת־חבורות ב־$(\mathbb{Z}_{24}, +)$.

שאלה 3 יהי $\mathbb{F}$ שדה. אנחנו סימנו בשיעור התרגיל על ידי $GL_n(\mathbb{F})$ את החבורה הלינארית הכללית, קבוצת המטריצות ההפיכות מגודל $n \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$. הראנו כי $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$ היא חבורה (הנקודה מסמנת כפל מטריצות). נסמן על ידי

$$SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) :\ \det(A) = 1\}$$

את החבורה הלינארית הפיוחזת, חבורת המטריצות עם דטרמיננטה 1. הראו כי $SL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F})$.

*נא לרשום על התרגיל את שם התלמיד, מספר זיהוי ומספר קבוצה.

†יש להגיש בשיעור התרגיל בפרשת מקץ:
קבוצה 03 – הגשה בשיעור ביום שני, כ"ב בכסלו (25 נוב'). קבוצה 06 – הגשה לפי הנחיות המתרגל. שאר הקבוצות – הגשה בשיעור ביום חמישי, כ"ה בכסלו (28 נוב').

שאלה 4 נסמן

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in GL_3\left(\mathbb{Z}_3\right):a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$$

קבוצת מטריצות מעל השדה $\mathbb{Z}_3$.

1. הראו כי G עם פעולת כפל מטריצות היא חבורה.

   רמז היא תת־חבורה של $GL_3\left(\mathbb{Z}_3\right)$.

2. חשבו את סדר החבורה. הראו כי הסדר של כל איבר שאיננו מטריצת היחידה הוא 3.

3. תהי H חבורה המקיימת לכל $g,h\in H$, $(gh)^3=g^3h^3$. מצאו דוגמא בה H איננה אבלית.

4. תהי H חבורה המקיימת לכל $g,h\in H$, $(gh)^2=g^2h^2$. הסיקו כי H אבלית.

שאלה 5

1. נביט בחבורה $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, עם פעולת החיבור מודולו 2 הפועלת רכיב־רכיב. מצאו את כל התת־חבורות הציקליות שלה.

2. הראו כי לחבורה G יש 3 תת־חבורות לא טריוויאליות A,B,C המקיימות $A\cup B\cup C=G$.

3. תהי G חבורה. הוכיחו כי G איננה איחוד של שתי תת־חבורות לא טריוויאליות שלה. דהיינו, אם H,K ת"ח המקיימות $\{e\}<H,K<G$, אז $G\neq H\cup K$.

   רמז בדקו מה קורה כשמכפילים איבר מ־H באיבר מ־K.

שאלה 6 אם $h\in H\leq G$, אז הסדר של h בחבורה H שווה לסדר שלו ב־G.