

מבנים אלגבריים*

תרגיל בית 4[†]

תזכורות ומושגים

- סדר של איבר g בחבורה G הוא המספר הטבעי המינימלי n המקיים $g^n = e$. אם אין טבעי שכזה, אז הסדר הוא אינסופי.
- ת"ח (=תת חבורה) H של חבורה G היא תת-קבוצה לא ריקה של G כך שביחס לפעולה של G , H היא חבורה בפני עצמה. מסמנים זאת על ידי $H \leq G$.
- לכל חבורה G מתקיים $G \leq G$ וגם $\{e\} \leq G$. לתת-חבורות אלו קוראים ת"ח טריוויאליות של G .
- קריטריון לת"ח: תהי G חבורה, ותהי $\emptyset \neq H \subseteq G$. א.ס.ם. לכל $g, h \in H$ מתקיים $gh \in H$ וגם $g^{-1} \in H$.

שאלה 1 נביט בחבורה הציקלית הנוצרת על ידי $\text{cis}10^\circ = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$ בתוך החבורה הכפלית (\mathbb{C}^*, \cdot) . מה הסדר של החבורה $\langle \text{cis}10^\circ \rangle$?

רמז השתמשו במשפט דה-מואבר.

שאלה 2 מצאו את כל התת-חבורות ב- $(\mathbb{Z}_{24}, +)$.

שאלה 3 יהי \mathbb{F} שדה. אנחנו סימנו בשיעור התרגיל על ידי $GL_n(\mathbb{F})$ את החבורה הלינארית הכללית, קבוצת המטריצות ההפיכות מגודל $n \times n$ מעל השדה \mathbb{F} . הראנו כי $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$ היא חבורה (הנקודה מסמנת כפל מטריצות). נסמן על ידי

$$SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) : \det(A) = 1\}$$

את החבורה הלינארית המיוחדת, חבורת המטריצות עם דטרמיננטה 1. הראו כי $SL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F})$.

*נא לרשום על התרגיל את שם התלמיד, מספר זיהוי ומספר קבוצה.

[†]יש להגיש בשיעור התרגיל בפרשת מקץ:

קבוצה 03 – הגשה בשיעור ביום שני, כ"ב בכסלו (25 נוב').

קבוצות 04, 05 – הגשה בשיעור ביום חמישי, כ"ה בכסלו (28 נוב').

קבוצה 06 – הגשה בשיעור ביום חמישי שאחריו, ב' בטבת (5 דצמ'), יחד עם תרגיל בית 5.

שאלה 4 נסמן

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{Z}_3) : a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

קבוצת מטריצות מעל השדה \mathbb{Z}_3 .

1. הראו כי G עם פעולת כפל מטריצות היא חבורה.

רמז היא תת-חבורה של $GL_3(\mathbb{Z}_3)$.

2. חשבו את סדר החבורה. הראו כי הסדר של כל איבר שאיננו מטריצת היחידה הוא 3.

3. תהי H חבורה המקיימת לכל $g, h \in H$, $(gh)^3 = g^3h^3$. מצאו דוגמה בה H איננה אבלית.

4. תהי H חבורה המקיימת לכל $g, h \in H$, $(gh)^2 = g^2h^2$. הסיקו כי H אבלית.

שאלה 5

1. נביט בחבורה $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, עם פעולת החיבור מודולו 2 הפועלת רכיב-רכיב. מצאו את כל התת-חבורות הציקליות שלה.

2. הראו כי לחבורה G יש 3 תת-חבורות לא טריוויאליות A, B, C המקיימות $A \cup B \cup C = G$.

3. תהי G חבורה. הוכיחו כי G איננה איחוד של שתי תת-חבורות לא טריוויאליות שלה. דהיינו, אם H, K ת"ח המקיימות $\{e\} < H, K < G$, אז $G \neq H \cup K$.

רמז בדקו מה קורה כשמכפילים איבר מ- H באיבר מ- K .

שאלה 6 אם $h \in H \leq G$, אז הסדר של h בחבורה H שווה לסדר שלו ב- G .