אביב תש"ף

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 4: חוקי שימור, משוואות המילטון וסוגרי פואסון

1. הלגרנג'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$
   (א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה.
   האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת ? מדוע ?
   (ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון
   (ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת טרנספורמצית סיבוב $x \to x + \epsilon y,\ \ y \to y - \epsilon x$.
   (ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו ?

2. הוכיחו כי שני לגראנגי'אנים $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ הנבדלים זה מזה בנגזרת שלמה של פונקציה של הקורדינטות והזמן $f(\vec{q}, t)$, כלומר $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\vec{q}, t)/dt$, שומרים על משוואות התנועה (רמז: הוכיחו כי $\delta S' = 0$, כאשר $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt$ הפעולה המתאימה ל $\mathcal{L}'$ וידוע כי $\delta S = 0$).

3. מטוטלת מתמטית (מסה m בקצה חוט באורך ℓ) מחוברת לתקרת מעלית הנעה במהירות קבועה $\vec{v}_0 = v_0\hat{y}$ ביחס למעבדה.
   (א) קבלו את הלגראנגי'אן במעלית $\mathcal{L}$ ובמעבדה $\mathcal{L}'$ (רשמו את הפוטנציאלים ביחס לנקודת שווי המשקל של המטוטלת) והראו כי
   $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\theta, t)/dt$, כאשר
   $f(\theta, t) = -mv_0\ell\cos\theta - \frac{1}{2}mgv_0t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2t$.
   (ב) רשמו את משוואות התנועה עבור $\mathcal{L}$ ו $\mathcal{L}'$ וודאו כי הן אכן זהות.

4. הלגראנג'יאן של חלקיק חפשי בקורדינטות פאראבוליות (ξ, η, ϕ) נתון ע"י
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\xi^2 + \eta^2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}m\xi^2\eta^2\dot{\phi}^2$$
   (א) מצאו את התנעים הצמודים (p_ξ, p_η, p_ϕ).
   (ב) מצאו את ההמילטוניאן.

5. נגדיר את סוגרי פואסון של שתי פונקציות
   $f(q_1, ..., q_n; p_1..., p_n; t),\ \ g(q_1, .., .q_n; p_1..., p_n; t)$ להיות
   $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$.

(א) הוכיחו כי $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$, כאשר $\mathcal{H}$ ההמילטוניאן של המערכת

(ב) רשמו את ההמילטוניאן משאלה 1 בקואורדינטות קרטזיות והראו כי השמורה שמצאתם ב 1ד מקיימת $\{f, \mathcal{H}\} = 0$

(ג) הכלילו את תוצאת 5ב לפוטנציאל כלשהוא מהצורה $U(x, y) = U(x^2 + y^2)$

6. הוכיחו את התכונות הבאות של סוגרי פואסון

(א) אנטיסימטריות $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ולכן $\{f, f\} = 0$

(ב) $\{f, const\} = 0$

(ג) לינאריות $\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha\{f, g\} + \beta\{f, h\}$

(ד) זהות יעקובי $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$

(ה) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$

7. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י

$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. נציג כעת את המשתנים

$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right), \; a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right)$.

(א) בטאו את $\mathcal{H}$ באמצעות a, a^*.

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a, a^*\}, \; \{a, \mathcal{H}\}, \; \{a^*, \mathcal{H}\}$.

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.

(ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.

(ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות 7ד. השוו לחישוב הישיר.