

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 4: חוקי שימור, משוואות המילטון וסוגרי פואסון

1. הלגרנג'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה.

האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת? מדוע?

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

(ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת

$$x \rightarrow x + \epsilon y, \quad y \rightarrow y - \epsilon x$$

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו?

2. הוכיחו כי שני לגראנג'יאנים $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ הנבדלים זה מזה בנגזרת שלמה של פונקציה של הקורדינטות והזמן $f(\vec{q}, t)$, כלומר $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\vec{q}, t)/dt$, שומרים על משוואות התנועה (רמז: הוכיחו כי $\delta S' = 0$, כאשר $S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}' dt$ הפעולה המתאימה ל \mathcal{L}' וידוע כי $\delta S = 0$).

3. מטוטלת מתמטית (מסה m בקצה חוט באורך ℓ) מחוברת לתקרת מעלית הנעה במהירות קבועה $\vec{v}_0 = v_0 \hat{y}$ ביחס למעבדה.

(א) קבלו את הלגרנג'יאן במעלית \mathcal{L} ובמעבדה \mathcal{L}' (רשמו את הפוטנציאלים ביחס לנקודת שווי המשקל של המטוטלת) והראו כי

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + df(\theta, t)/dt$$

$$f(\theta, t) = -mv_0 \ell \cos \theta - \frac{1}{2}mgv_0 t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 t$$

(ב) רשמו את משוואות התנועה עבור \mathcal{L} ו \mathcal{L}' וודאו כי הן אכן זהות.

4. הלגרנג'יאן של חלקיק חפשי בקורדינטות פאראבוליות (ξ, η, ϕ) נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\xi^2 + \eta^2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}m\xi^2\eta^2\dot{\phi}^2$$

(א) מצאו את התנעים הצמודים (p_ξ, p_η, p_ϕ) .

(ב) מצאו את ההמילטוניאן.

5. נגדיר את סוגרי פואסון של שתי פונקציות

$$f(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t), \quad g(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$$

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

- (א) הוכיחו כי $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$, כאשר \mathcal{H} ההמילטוניאן של המערכת
- (ב) רשמו את ההמילטוניאן משאלה 1 בקואורדינטות קרטזיות והראו כי השמורה שמצאתם ב 1d מקיימת $\{f, \mathcal{H}\} = 0$
- (ג) הכלילו את תוצאת 5b לפוטנציאל כלשהוא מהצורה

$$U(x, y) = U(x^2 + y^2)$$

6. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + i \frac{p}{m\omega} \right), \quad a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - i \frac{p}{m\omega} \right)$$

- (א) בטאו את \mathcal{H} באמצעות a, a^* .
- (ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a, a^*\}$, $\{a, \mathcal{H}\}$, $\{a^*, \mathcal{H}\}$.
- (ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.
- (ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.
- (ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות 6d. השוו לחישוב הישיר.