

תרגיל 5 בפונקציות מרוכבות

1. מצאו את כל הערכים האפשריים של הביטויים הבאים:

$$(1 + i)^{2i} \quad (\text{א})$$

$$(-i)^{-i} \quad (\text{ב})$$

$$\text{Im}((1 - i)^{1+i}) \quad (\text{ג})$$

2. הראו שחוק החזקות $e^{zw} = (e^z)^w$ נכשל (כאשר החזקה מוגדרת עם הענף העיקרי של הלוגריתם) ע"י בחירה של z, w מתאימים.

3. מצאו נוסחא רב ערכית עבור $\arctan z$.

4. חשבו $\int_{\gamma} z \sin x dz$ כאשר $x = \operatorname{Re} z$ ו- γ מסילה המורכבת משלושה קטעים ישרים: מ- i ל- 0 , מ- 0 ל- 1 ומ- 1 ל- $1+i$.

5. חשבו $\int_{\gamma} [\sin z + \bar{z}] dz$ כאשר γ היא המסילה המוגדרת ע"י $z(t) = \begin{cases} e^{it} & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1-2t & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

6. חשבו $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}^3 - 8}{\bar{z} - 2} dz$ כאשר γ היא המסילה שמורכבת מהקטע הישר מ- i עד 0 , ואח"כ הקטע הישר מ- 0 עד 1 .

7. השתמשו במשפט ההערכה (חסם ML) כדי להוכיח את אי השוויונות הבאים:

א. $\left| \int_{\gamma} (e^z - e^{\bar{z}}) dz \right| \leq 2(\pi + 2)e$ כאשר γ היא המסילה המורכבת משלושת הקטעים

הישרים: מ- 1 ל- $1 + \frac{\pi}{2}i$, מ- $1 + \frac{\pi}{2}i$ ל- $1 - \frac{\pi}{2}i$ ומ- $1 - \frac{\pi}{2}i$ ל- -1 .

ב. $\left| \int_{\gamma} \frac{2-z}{2+\bar{z}} dz \right| \leq 3\pi + 6$ כאשר γ היא המסילה המורכבת מחצי המעגל (עם רדיוס 1 ומרכז

באפס) מ- 1 ל- -1 ומהקטע הישר מ- -1 ל- 1 .