אביב תשע"ה

פיסיקה למתמטיקאים

אינטגרל יעקובי

1. נתחו את התנועה במרחב הפאזה עבור ההמילטוניאן

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2mR^2} - \frac{1}{2} mR^2\omega^2 \sin^2\theta + mgR\cos\theta. \tag{1}$$

ציירו את הזרימה במרחב הפאזה כאשר $\omega < \Omega \equiv \sqrt{g/R}$.

נרשום תחילה את משוואות המילטון

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{mR^2}, \tag{2}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta. \tag{3}$$

נחשב את מטריצת היעקביאן ב 3 נקודות שווי המשקל $(0,0), (\pi,0), (\theta,0)$ בהתאמה, כאשר θ מקיימת $\cos\theta = -\Omega^2/\omega^2$ ואת הע"ע בכל מקרה. נקבל

(א)

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mR^2} \\ mR^2\omega^2 + mR^2\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

עם ע"ע

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{\omega^2 + \Omega^2} \tag{5}$$

ולכן $(0,0)$ נקודת אוכף.

(ב)

$$A(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mR^2} \\ mR^2\omega^2 - mR^2\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

עם ע"ע

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} \tag{7}$$

ולכן עבור $\omega < \Omega$ $(\pi,0)$ נקודת אוכף. אחרת, עבור $\omega > \Omega$, (7) מדומים טהורים ולכן $(\pi,0)$ נקודה מרכזית. [1]

[1] בסביבת נקודה מרכזית התנועה היא על מסלולים סגורים.

עבור $\omega = \Omega$ נקבל ע"ע מנוון $\lambda = 0$ עם ו"ע $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן הפתרון נתון ע"י

$$\begin{pmatrix} \delta\theta \\ \delta p \end{pmatrix} = \omega_0 t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m\omega_0 R^2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

כאשר ω_0 המהירות הזויתית הקבועה המתאימה.

(ג)

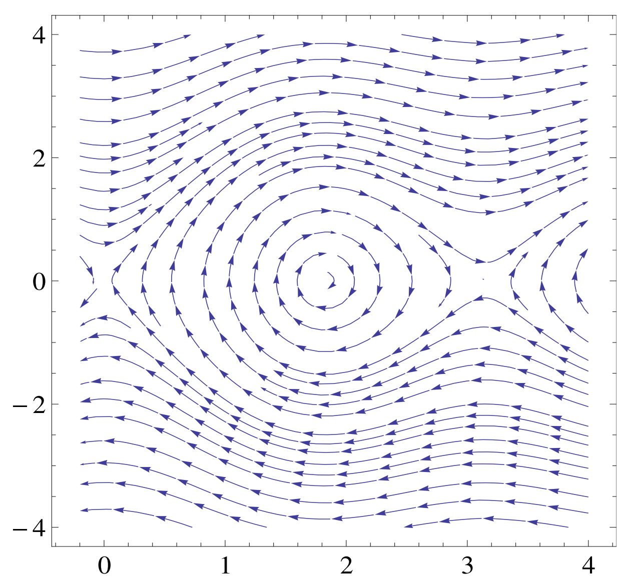
$$A(\theta, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mR^2} \\ mR^2\omega^2 \cos 2\theta + mR^2\Omega^2 \cos\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

ובהצבת $\cos\theta = -\Omega^2/\omega^2$ נקבל את ה ע"ע

$$\lambda_\pm = \pm i\omega\sqrt{1 - (\Omega/\omega)^4}, \tag{10}$$

כאשר התנאי $\Omega < \omega$ מבטיח כי (10) מדומים טהורים ולכן $(\theta, 0)$ מרכזית.

בשרטוט מתוארת הזרימה במרחב הפאזה עבור $\Omega < \omega$ כאשר בנוסף לנקודות האוכף $(0,0), (\pi, 0)$ קיימת גם נקודה מרכזית יציבה $(\theta, 0)$.



p Vs $\theta, \Omega < \omega$