אלגברה לינארית 1 תיכוניסטים קיץ תשעג/פתרון הבוחן

תוכן עניינים

שאלה 1

לפי כפל עמודה עמודה קל לראות שמחפשים 3 עמודות $C_1(A),C_2(A),C_3(A)$

שמקיימות

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}C_1(A)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}C_2(A)=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}C_3(A)=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

כך שקיבלנו 3 משוואות, כל אחת בשני נעלמים.

אם נפתור את המשוואה הראשונה

$$\begin{bmatrix}1&2&|&2\\2&4&|&4\end{bmatrix}\overset{R_2=R_2-2R_1}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&2&|&2\\0&0&|&0\end{bmatrix}$$

נראה שיש משתנה חופשי אחד (ואין שורות סתירה) ולכן יש 7 פתרונות.

אותה הדבר קורה בשביל שאר המשוואות ולכן בסך הכל יש

7^3 פתרונות.

שאלה 2

A היא מטריצה הפיכה, ולכן הצורה המדורגת קנונית שלה היא I.

אם נסמן ב $E_1,\dots,E_5$ את המטריצות האלמנטריות המתאימות לפעולות הנתונות. אז בעצם

$E_5E_4E_3E_2E_1A=I$

ולכן $A=(E_1)^{-1}(E_2)^{-1}(E_3)^{-1}(E_4)^{-1}(E_5)^{-1}I$

כלומר, אם נבצע את הפעולות ההפוכות בסדר הפוך על I, נגיע ל A.

הפעולות ההפוכות בסדר הפוך הן:

$R_1\leftrightarrow R_5$

$R_1=R_1+2R_2$

$R_1\leftrightarrow R_3$

$R_1=R_1-R_2$

$R_1=\frac{1}{2}R_1$

ולכן קל לחשב ש

$$A=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

היות ו

$A=(E_1)^{-1}(E_2)^{-1}(E_3)^{-1}(E_4)^{-1}(E_5)^{-1}I$

נקבל ש

$A^-1=E_5E_4E_3E_2E_1I$

כלומר צריך לבצע את הפעולות האלה על I כדי להגיע ל A^{-1}

לכן קל לחשב ש

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&-2&0\end{bmatrix}$$

היות ו $A^{-1}=E_5E_4E_3E_2E_1I$ נקבל ש

$(E_1)^{-1}(E_2)^{-1}(E_3)^{-1}(E_4)^{-1}(E_5)^{-1}A^-1=I$

כלומר הפעולות שצריך לעשות כדי לדרג את A^{-1} הן הפעולות שהפוכות לפעולת הכתובות בסדר הפוך כלומר:

$R_1\leftrightarrow R_5$

$R_1=R_1+2R_2$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$R_1 = R_1 - R_2$$

$$R_1 = \frac{1}{2} R_1$$

(זאת כמובן לא הדרך היחידה להביא את A^{-1} לצורה מדורגת קנונית, אבל זאת הדרך הכי פשוטה.)

שאלה 3

סעיף א

הוכחה: יהי $\alpha_1(v_1+v_2)+\alpha_2(v_2+v_3)+\alpha_3(v_1+v_3)=0$ צירוף לינארי מתאפס כלשהוא של הוקטורים שבשאלה.

צריך להוכיח ש $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

קל לראות שהצירוף הלינארי שווה ל

$$(\alpha_1+\alpha_3)v_1+(\alpha_1+\alpha_2)v_2+(\alpha_2+\alpha_3)v_3=0$$

היות ו v_1,v_2,v_3 בת"ל. נקבל ש

$$\alpha_1+\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3=0$$

זה נותן לנו מערכת משוואות פשוטה.

קל להסיק ממנה ש

$$\alpha_1=-\alpha_2, \quad \alpha_1=-\alpha_3$$

אבל בגלל ש $\alpha_2+\alpha_3=0$

נקבל ש $-2\alpha_1=0$

בגלל שהמאפיין שונה מ 2 אפשר לחלק ב 2 ולקבל

$-\alpha_1=0$ כלומר $\alpha_1=0$

ומכאן ברור גם $\alpha_2=\alpha_3=0$.

סעיף ב

לא נכון. נבחר $V=\mathbb{R}^2$ ו $U=span\{(1,0)\}$ ו $W=span\{(0,1)\}$

ברור ש $(1,0),(0,1)\in U\cup W$

אם האיחוד היה מרחב וקטורי הוא היה סגור לחיבור ולכן גם $(1,1)\in U\cup W$

אבל זה לא נכון. סתירה.

סעיף ג

לא רק שהטענה לא נכונה. אלא שלכל מערכת לא הומוגנית זה לא נכון.

דוגמא נגדית פשוטה היא המערכת $x+y=1$ מעל $\mathbb{R}$.

ניקח פתרונות $v_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$v_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

סכומם

$$v_1+v_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

הוא לא פתרון.