מבחן לדוגמא 2 – מד"ר להנדסה – 83-115

זמן המבחן: 3 שעות. מבחן פתוח: כל חומר עזר מותר. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו פתרון למד"ר $y'=x\left(y-y^3\right)$ המקיים $y(0)=\frac{1}{2}$.

זוהי משוואת ברנולי $y'-xy=-xy^3$.

נציב $z=y^{-2}$ ולכן $z'=-2y^{-3}y'=\frac{-2}{y^3}y'$

לכן $\frac{z'}{-2}-xz=-x$ כלומר $z'+2xz=2x$.

זו כמובן מד"ר לינארית מסדר ראשון ופתרונה הוא:

$$z=e^{-\int 2xdx}\left(\int 2xe^{\int 2xdx}dx+c\right)=e^{-x^2}\left(\int 2xe^{x^2}dx+C\right)=e^{-x^2}\left(e^{x^2}+C\right)=1+\frac{C}{e^{x^2}}$$

לכן $y^2=\frac{1}{1+\frac{C}{e^{x^2}}}$, כיוון שנתון $y(0)=1$ נקבל כי $\frac{1}{4}=\frac{1}{1+C}$

לכן $y=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{e^{x^2}}}}$

2. מצאו פתרון למד"ר $y''=y'y$ המקיים $y(0)=1, y'(0)=1$.

כיוון שהמשתנה x אינו מופיע, נוריד את סדר המשוואה.

אנו מחפשים פונקציה p כך שעבור הפתרון היא מקיימת $y'=p(y)$ ולכן $y''=p'(y)y'$.

נציב במד"ר ונקבל $p'p=py$, ולכן $p'(y)=y$.

מכאן נובע כי $p(y)=\frac{1}{2}y^2+C$.

לכן הפתרון מקיים את המשוואה $y'=p(y)=\frac{1}{2}y^2+C$.

כעת מוטב להשתמש בנתון; נציב $x=0$ ונקבל כי $1=\frac{1}{2}+C$.

לכן אנו מחפשים את פתרון המשוואה $y'=\frac{1}{2}\left(y^2+1\right)$, זו משוואה פרידה.

נבצע את הפרדת המשתנים ונקבל $\frac{1}{y^2+1}dy=\frac{1}{2}dx$.

נעשה אינטגרציה ונקבל כי $\arctan\left(y\right)=\frac{1}{2}x+C$.

שוב נשתמש בנתון, נציב $x=0$, ונקבל $\arctan\left(1\right)=C$ כלומר $C=\frac{\pi}{4}$.

סה"כ הפתרון הסופי הינו $y=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

3. מצאו פתרון למערכות המד"ר הבאות:

א. $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$ המקיים $y_1(0) = 2, y_2(0) = 0$

המד"ר היא מהצורה $\vec{y}' = A\vec{y}$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

זו מטריצה לכסינה עם ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ המתאים לע"ע 1 , וו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ המתאים לע"ע -1.

לכן הפתרון הוא $\vec{y} = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל כי $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ולכן $c_1 = c_2 = 1$.

לכן סה"כ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, במילים אחרות $\begin{matrix} y_1 = e^x + e^{-x} \\ y_2 = e^x - e^{-x} \end{matrix}$

ב. $\begin{cases} y_1'' = y_2 \\ y_2'' = y_1 \end{cases}$ המקיים $\begin{matrix} y_1(0)=1, y_2(0)=1 \\ y_1'(0)=1, y_2'(0)=-1 \end{matrix}$

הפעם המד"ר היא מהצורה $\vec{y}'' = A\vec{y}$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אותה המטריצה מסעיף קודם.

אם נציב $\vec{y} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ נקבל כי $\vec{y}'' = f''\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A\vec{y} = Af\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

לכן עלינו לפתור את המד"ר $f'' = f$, ונקבל כי הפתרון הכללי הוא מהצורה $\vec{y} = \left(c_1e^x + c_2e^{-x}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

באופן דומה, אם נציב $\vec{y} = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ נקבל כי $\vec{y}'' = f''\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A\vec{y} = Af\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

לכן עלינו לפתור את המד"ר $f'' = -f$, ונקבל כי הפתרון הכללי הוא מהצורה

$\vec{y} = \left(c_3\sin(x) + c_4\cos(x)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

לכן סה"כ הפתרון הכללי למד"ר הינו $\vec{y} = \left(c_1e^x + c_2e^{-x}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(c_3\sin(x) + c_4\cos(x)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ולכן
$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\sin(x) + c_4\cos(x) \\ y_2 &= c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\sin(x) - c_4\cos(x) \end{aligned}$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל את הפתרון הסופי
$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x} + \sin(x) \\ y_2 &= e^{-x} - \sin(x) \end{aligned}$$

4. מצאו פתרון למד"ר $y'=-1\dfrac{x^2+1}{3x^2+2xy}$ המקיים $y(-1)=1$.

זו בעצם המד"ר $\left(x^2+1\right)dy=-\left(3x^2+2xy\right)dx$ כלומר $\left(3x^2+2xy\right)dx+\left(x^2+1\right)dy=0$

נזכור כי מד"ר $Pdx+Qdy=0$ היא מדוייקת כאשר $P_y=Q_x$.

במקרה זה, אכן נגזור ונקבל כי $P_y=Q_x=2x$.

לכן נבצע אינטגרציה $U(x,y)=\int Pdx=\int\left(3x^2+2xy\right)dx=x^3+x^2y+c(y)$

כעת $U_y=Q$ ולכן $x^2+c'(y)=x^2+1$.

לכן $c'(y)=1$ ולכן $c(y)=y$.

סה"כ $U(x,y)=x^3+x^2y+y$, ולכן פתרון המד"ר מקיים את המשוואה הסתומה $x^3+x^2y+y=C$.

נציב את תנאי ההתחלה $x=-1$ ונקבל כי $-1+1+1=C$ ולכן $C=1$.

ביחד $x^3+y(x^2+1)=1$ וסה"כ הפתרון הסופי הינו $y=\dfrac{1-x^3}{x^2+1}$.

5. מצאו פתרון למד"ר $y''=\left(2+4x^2\right)y$ המקיים $y(0)=1, y'(0)=0$.

נחפש פתרון ששווה לטור חזקות $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

מתנאי ההתחלה אנו יודעים כי $a_0=1, a_1=0$.

נציב במד"ר את טור החזקות ונקבל את המשוואה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n x^{n-2}=2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n+4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

נזיז את האינדקסים ונקבל כי $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n=2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n+4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$

לכן $2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n=2a_0+2a_1x+2\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n+4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$

נבצע השוואת מקדמים:

$2a_2=2a_0$ ולכן $a_2=1$.

$6a_3=2a_1$ ולכן $a_3=0$

ולכל $n\geq 2$ מתקיים כי $(n+2)(n+1)a_{n+2}=2a_n+4a_{n-2}$.

נציב על מנת לגלות את החוקיות.

ראשית, כל המקדמים האי זוגיים מתאפסים.

שנית, נקבל כי $a_4=\frac{1}{2}, a_6=\frac{1}{6}, a_8=\frac{1}{24}, \ldots$ ובאופן כללי $a_{2n}=\frac{1}{n!}$.

לכן הפתרון הוא $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=e^{\left(x^2\right)}$