

מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים נתונה קבוצה X ויחס R על הקבוצה. עבור כל יחס קבע האם הוא יחס סדר, יחס סדר חזק¹ ולאו יחס סדר מלא. (ייתכן שיותר מאחד מהם. שימו לב שיחס סדר מלא הוא יחס סדר.)

1. $X = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^a \leq e^b\}$

2. $X = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq b^2\}$

3. $X = \mathbb{N}, R = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n^2 < m\}$

שאלה 2

מצאו את כל יחסי הסדר המלאים על הקבוצה $\{4, 5, 6\}$. הסבירו מדוע אין יחסים סדר מלאים נוספים.

שאלה 3

תהי X קבוצה ו- R יחס סדר מלא על X . נניח כי $Y \subseteq X$ ונגדיר $S = R \cap (Y \times Y)$. הראו כי S יחס סדר מלא על Y .

שאלה 4

תהי X קבוצה ויהיו R, S שני יחסי סדר מלאים על X . הוכיחו כי אם $R \subseteq S$ אז $R = S$.

שאלה 5

תהי X קבוצה ו- R יחס על X . נגדיר $S = \{(b, a) \mid (a, b) \in X \times X \setminus R\}$. הוכיחו כי אם R הוא יחס סדר מלא אז S הוא יחס סדר חזק².

¹ למי שלא זוכר/מכיר: יחס $<$ על קבוצה A הוא יחס סדר חזק אם הוא טרנזיטיבי, א-רפלקסיבי (לכל $a \in A$, הפסוק $a < a$ שקרי) וא-סימטרי (אם $a < b$ אז לא מתקיים $b < a$). [במילים אחרות: הוא כמו היחס $<$ על מספרים ממשיים.]
² הערה: אין טעות בניסוח: הסדר של a ו- b מתהפך בהגדרה של S .