

מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים נתונה קבוצה X ויחס R על הקבוצה. עבור כל יחס קבע האם הוא יחס סדר, יחס סדר חזק¹ ולאו יחס סדר מלא. (ייתכן שיותר מאחד מהם. שימו לב שיחס סדר מלא הוא יחס סדר.)

1. $X = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid e^a \leq e^b\}$

2. $X = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq b^2\}$

3. $X = \mathbb{N}, R = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n^2 < m\}$

שאלה 2

מצאו את כל יחסי הסדר המלאים על הקבוצה $\{4,5,6\}$. הסבירו מדוע אין יחסים סדר מלאים נוספים.

שאלה 3

תהי X קבוצה ו- R יחס סדר על X . נניח כי $Y \subseteq X$ ונגדיר $S = R \cap (Y \times Y)$. הראו כי S יחס סדר על Y .

שאלה 4

תהי X קבוצה ויהיו R, S שני יחסי סדר מלאים על X . הוכיחו כי אם $R \subseteq S$ אז $R = S$.

שאלה 5

תהי X קבוצה ו- R יחס על X . נגדיר $S = \{(b, a) \mid (a, b) \in X \times X \setminus R\}$. הוכיחו כי אם R הוא יחס סדר מלא אז S הוא יחס סדר חזק².

שאלה 6

יהי R יחס סדר על X . נגדיר:

א. $R^2 = R \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in X: xRz \wedge zRy\}$

ב. $R^{op} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$

ג. $I = \{(x, x) \mid x \in X\}$

הוכיחו כי R יחס סדר אם ורק אם $R^2 \subseteq R$ וגם $R \cap R^{op} = I$.

שאלה 7

תהי A קבוצה ותהי X קבוצת החלוקות של A . נגדיר יחס סדר \leq על X באופן הבא: עבור $\Pi, \Pi' \in X$ נכתוב $\Pi \leq \Pi'$ אם לכל $A \in \Pi$ קיימת $A' \in \Pi'$ כך ש- $W \subseteq B$ (כל קבוצה ב- Π' היא איחוד של קבוצות ב- Π).
א. הוכיחו כי \leq הוא יחס סדר על X .

¹ למי שלא זוכר למכיר: יחס $<$ על קבוצה A הוא יחס סדר חזק אם הוא טרנזיטיבי, א-רפלקסיבי (לכל $a \in A$, הפסוק $a < a$ שקרי) וא-סימטרי (אם $a < b$ אז לא מתקיים $b < a$). [במילים אחרות: הוא כמו היחס $<$ על מספרים ממשיים.]

² הערה: אין טעות בניסוח: הסדר של a ו- b מתהפך בהגדרה של S .

- ב. מה האיברים המקסימליים והמינימליים ב- X ? (איבר $x \in X$ יקרא מקסימלי אם $x \leq y$ גורר $x = y$. הוא יקרא מינימלי אם $y \leq x$ גורר $x = y$).
- ג. האם תמיד \leq יחס סדר מלא?