חוברת קורס הידרודינמיקה ואלסטיות

המחלקה לפיסיקה - אוניברסיטת בר אילן

חיבר וכתב: עידו פורת

הקדמה

נושא ההידרודינמיקה עוסק בנושאים כלליים של זרימה של נוזלים. אם ננסה לתאר בצורה מפורשת את פרופיל הזרימה ואת מאפייניה של הזרימה, נדרש להשתמש במתמטיקה מורכבת מאוד. לאחר שנכיר כמה שיטות ונקבל ניסיון **ואינטואיציה**, נוכל להשתמש בקרובים הגיוניים ולהניח הנחות שיצמצמו את מורכבות הבעיה. אף על פי כן, ישנן מספר לא רב של בעיות שכן נוכל לפתור ועדיין מורכבות בפני עצמן.

בעיות מורכבות שנפתור: זרימה בתעלה, זרימה סביב גליל. לעומת זאת, בעיות כמו: זרימה במכונת כביסה, הוריקן, תנועת מים סביב ספינה – אלו בעיות שלא נתמודד איתן.

בחוברת זאת, בתחילת כל פרק, מוסבר חלק תאורתי ובסופו דוגמאות פתורות בצורה מפורטת ומעמיקה אל מעבר לשאלה עצמה.

אני רואה חוברת זאת שונה מהקודמות לה מכמה סיבות:

נושא ההידרודינמיקה הוא נושא שולי בלימוד התואר האקדמי ולכן לא כתובות חוברות רבות בנושא זה (זאת ועוד בעברית!). החוברת אמנם מכוונת כלפי חומר הקורס במחלקה לפיסיקה באוניברסיטת בר אילן, אך רלוונטית כלפי כל קורס בנושא ההידרודינמיקה.

חוברת זו מיועדת לסטודנטים שנה שנייה בפיסיקה - אך לא רק! דרוש ידע מוקדם של אנליזה וקטורית, משוואות דיפרנציאליות רגילות, משוואות דיפרנציאליות חלקיות ידע בסיסי במכניקה סטטיסטית.

אשמח לענות לכל שאלה או בעיה כלשהי.

ניתן לפנות אלי באימייל: idopora@gmail.com או בפלאפון: 0548319650

תודה מיוחדת לשרית, אשתי, שהגתה את רעיון כתיבת החוברת ותמכה בי בכל שלב של כתיבת החוברת מבחינה מקצועית.

תוכן עניינים:

פרק 1: לחץ Pressure

1.1. לחץ

לחץ (המסומן באות P) הוא כח ליחידת שטח המופעל במאונך למשטח מסוים.
כאשר יחידות הלחץ הן פסקל כאשר 1 פסקל שווה ניוטון חלקי מטר רבוע.
לחץ בתוך נוזל הוא הכח שנוצר מהתנגשות מולקולות הנוזל בדפנות הכלי שמכיל את הנוזל. לחץ נמדד על ידי מכשיר הנקרא ברומטר.

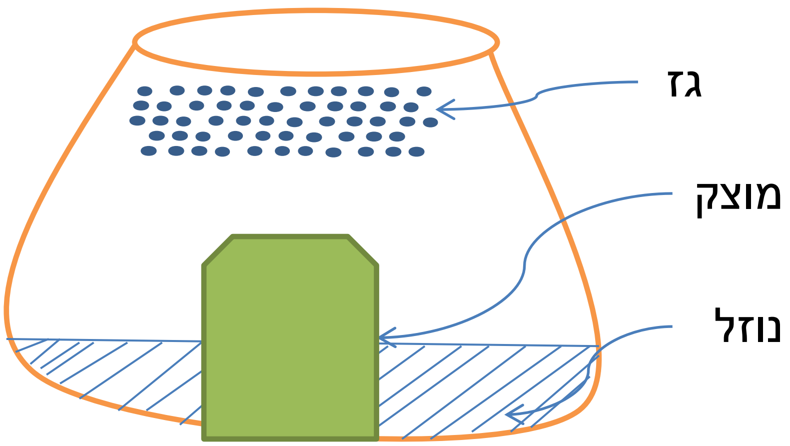
מבחינה מתמטית: $P=\frac{F}{S}$ כאשר S הוא השטח עליו מופעל הכח F.

1.2. מצב צבירה

גז יתפשט בחלל הכלי עד שיגיע למצב של שיווי משקל בו תהיה לגז אנרגיה מינימלית. הקשר בין מולקולות הגז חלש מאוד והמרחק בין כל מולקולה לאחרת גדול מאוד.

נוזל מקבל את צורת הכלי בו הוא נמצא ובכך מגיע למצב של שיווי משקל עם מינימום אנרגיה. הקשר בין מולקולות הנוזל חזק יותר מזה של הגז אך עדיין זהו קשר חלש יחסית (לכן משנה הנוזל את צורתו כמעט בכל רגע).

מוצק לא משנה את צורתו. הקשר בין מולקולות המוצק הוא חזק מאוד.

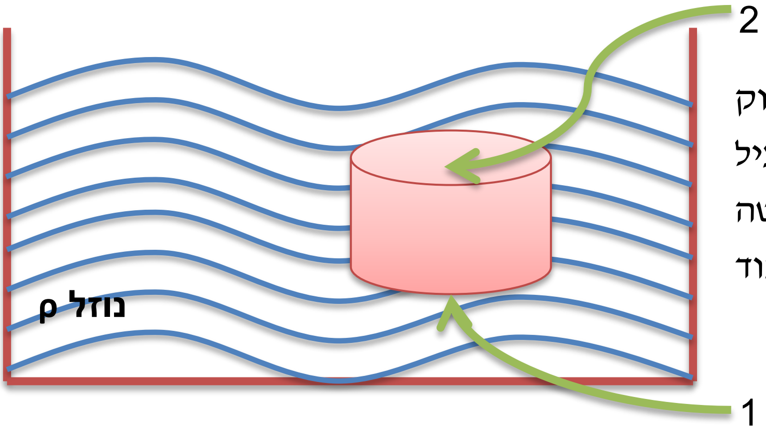


בנושא ההידרודינמיקה נדון במצב צבירה נוזל בעיקר!

1.3. חוק פסקל Pascal

זהו החוק הבסיסי של ההידרודינמיקה הקרוי על שם הפיסיקאי בלז פסקל. החוק מתאר את הלחץ במצב של שיווי משקל מכני.

כאשר אין שדה כבידה, חוק פסקל קובע כי לכל נקודה של גוף או נוזל בלתי דחיס יש לחץ השווה ללחץ בו נמצא הנוזל. לחץ זה מופעל בצורה שווה לכל הכיוונים.



כאשר יש שדה כבידה חוק פסקל קובע שהנוזל מפעיל לחץ שמופעל כלפי מטה ואשר תלוי בגובה עמוד הנוזל.

כאשר, g היא תאוצת הכובד, S הוא שטח מכסה הגליל, P_1 P_2 הם הלחצים על המשטח העליון והתחתון בהתאמה (עליהם פועל כח הכובד), ρ הוא צפיפות הנוזל ו-h הוא גובה הגליל.

החוק מנוסח בצורה זו :

$$P_2S - P_1S = -\rho gSh \longrightarrow P_2 - P_1 = -\rho gh$$

$$\boxed{P_1 = P_2 + \rho gh}$$

ניתן לראות כי הלחץ בתחתית הגליל גבוה מהלחץ בחלקו העליון.

$$P_2 < P_1$$

חשוב לציין כי לא התחשבנו בעובדה שצורת הגוף היא גליל, אלא התחשבנו רק **בהפרשי הגבהים**.

1.4. תיאור הלחץ לפי עמוד ענן

רוצים להשוות לחצים בין שתי נקודות כלשהן על פני כדור הארץ. כיצד ניתן להגדיר לחץ בגובה מסוים? מדוע בפסגות ההרים יש לחץ נמוך? ובים המלח הלחץ הוא גבוה?

נניח אדם העומד בנקודה A. נדמיין גליל ארוך שמתחיל מראש האדם עד קצה האטמוספירה. בתוך הגליל הדמיוני נמצא אויר אשר לוחץ על ראש האדם. ככל שהגליל יהיה ארוך יותר, כך יותר אויר ילחץ על ראש האדם. כאשר משווים בין שתי נקודות עם הפרשי גבהים, הלחץ בנקודה הנמוכה יותר יהיה גבוה מאשר בנקודה הגבוהה.

על כן, בים המלח יש את הלחץ החזק ביותר על פני כדור הארץ ובפסגות האוורסט הלחץ הוא הנמוך ביותר בכדור הארץ.

להלן, מספר דוגמאות בנושא זה הכוללות פתרונות מלאים:

1.5. דוגמאות – לחץ (Pressure)

1. רוצים להציב עמוד תאורה שמסתו 300 ק"ג באצטדיון כדורגל. הלחץ המקסימאלי שניתן להפעיל על משטח האצטדיון הוא 5 אטמוספרות. מה צריך להיות שטח הבסיס של עמוד התאורה על מנת שיהיה יציב?

להלן הקשר בין היחידות הידועות לבין יחידות הלחץ:

$$\{\ [P]=\frac{[F]}{[A]}=\frac{Newton}{(\mathrm{Centimetre})^2}=Atmosphere\ \}$$

2. אדם בעל מסה m אשר שטח כף רגלו האחת היא A סמ"ר עומד על הרצפה. יש להביע באמצעות הגדלים הנתונים את הלחץ שהאדם מפעיל על הרצפה כאשר:

א. הוא עומד על שתי רגליו.

ב. הוא עומד על רגל אחת.

ג. מבצע עמידת ידיים.

ד. כיצד הלחץ משתנה בין כל אחד מהמקרים?

3. תיבה (a<b<c) בעלת מסה m מונחת על שולחן.

א. כיצד יש להניח את התיבה כדי שהלחץ על השולחן יהיה מינימאלי?

ב. כיצד יש להניח את התיבה כדי שהלחץ על השולחן יהיה מקסימאלי?

4. יש להסביר את העיקרון של חוק הכלים השלובים (באמצעות מונחים פיסיקליים).
נא להתייחס להשפעת התמוססות הקרחונים על איים נמוכים ומדינות נמוכות בעולם.

5. נרצה למצוא איך משתנה הלחץ באטמוספרה. נסתכל על אלמנט נפח נוזלי בעל תאוצה $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ הנמצא בשדה גרביטציה. על ידי הפרש לחצים, בין פאות מקבילות, נמצא את משוואת שיווי המשקל ההידרוסטטי (כאשר $\vec{a} = 0$).
כיצד משתנה הלחץ עבור גז אידיאלי? (רמז: משוואת המצב של גז אידיאלי היא P=ρKT כאשר ρ היא צפיפות הגז, K הוא קבוע בולצמן , T היא הטמפרטורה).

6. דלי בצורת גליל, המכיל מים, מסתובב סביב הציר המרכזי שלו.

א. באיזו מהירות זוויתית Ω צריך להסתובב הדלי כדי שהמים רק יגעו בנקודה A?

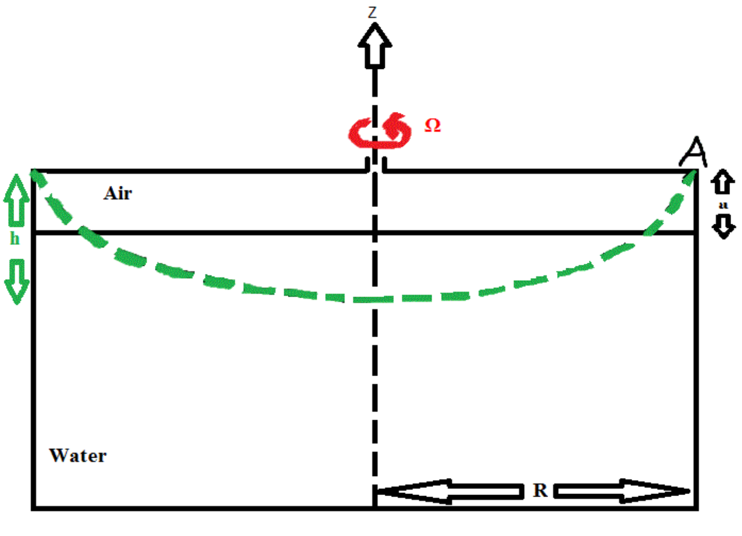
ב. מהו הכח F הפועל על תחתית הדלי?

H=0.22cm הוא גובה הדלי

R=16 cm

a=2 cm

$\rho = 1000\frac{kg}{m^3}$



1.6. פתרונות לדוגמאות – לחץ (Pressure)

1. כדי שהעמוד יהיה יציב, נחפש מהו שטח הבסיס המקסימלי על מנת שיופעל לחץ מקסימלי על משטח האצטדיון.

נרשום כעת את הנתונים: $m = 300kg \quad P = 5atm \quad g = 9.8\frac{m}{\sec^2}$

היחס בין הכח שמפעיל גוף, לשטח המגע בין הגוף לקרקע, זהו הלחץ. הנוסחא המקשרת בין גדלים אלו היא: $P = \frac{F}{S}$.

את יחידות הלחץ אפשר להציג במספר צורות. אנחנו נשתמש בגודל הנקרא אטמוספירה (atm) המוגדר על ידי היחידות המוכרות: ניוטון וסנטימטר:

$$\left\{ [P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{Newton}{(\text{Centimetre})^2} = Atmosphere \right\}$$

כעת נפתור:

$$P = \frac{F}{S} \xrightarrow{F=mg} P = \frac{mg}{S} = 5[atm] \to S = \frac{mg}{5[atm]} = \frac{300[kg]\bullet 9.8[\frac{m}{\sec^2}]}{5[atm]} = 588[\frac{N}{atm}] = 588cm^2$$

אם השטח יהיה קטן יותר מ588 סנטימטרים מעוקבים אזי, משטח האצטדיון לא יוכל לשאת בזה ויגרם נזק למשטח.
אם השטח יהיה גדול יותר, "יפוזר" הכח על אזור נרחב יותר ובכך יהיה פחות לחץ על אזור ספציפי במגרש.

2. כאשר גוף נשען על משטח כלשהו, הלחץ שהוא מפעיל על הרצפה שווה למשקלו מחולק בגודל שטח המגע.
(שימו לב כי נתון כסמ"ר)

א. כאשר האדם עומד על שתי רגליו: $P = \frac{F}{S} = \frac{Mg}{2A}$

ב. כאשר האדם עומד על רגל אחת (בהנחה שהן סימטריות): $P = \frac{F}{S} = \frac{Mg}{A}$ ניתן לראות כי הלחץ גדל אילו עמד האדם על שתי רגליו.

ג. כאשר האדם מבצע עמידת ידיים: $P = \frac{F}{S} \xrightarrow{B<A} P = \frac{Mg}{2B}$

ד. כאשר משטח המגע גדול יותר הלחץ יהיה קטן יותר (בהנחה שמשקל הגוף נשאר קבוע). לכן, $P_{2A} < P_{2B} < P_A$.

כאשר האדם עומד על יד אחת יפעל לחץ מקסימלי. הלחץ יקטן כאשר עושים עמידת ידיים. הלחץ יהיה מינימלי כאשר האדם עומד על שתי רגליו.

3. תיבה (a<b<c) בעלת מסה m מונחת על שולחן.

משקל התיבה לא משתנה כאשר מניחים את התיבה על פאה זו או אחרת.

על כן, קובע אך ורק משטח המגע בין התיבה לשולחן.

לפי הנוסחא המקשרת בין שטח המגע ללחץ המופעל: $P = \frac{F}{S}$

כדי שהלחץ יהיה מינימלי נדרוש כי שטח משטח המגע בין התיבה לשולחן יהיה מקסימלי! אי לכך והתאם לזאת, נניח את התיבה על הפאה bxc.

4. כלים שלובים

<u>העיקרון הפיסיקלי:</u> עיקרון חוק הכלים השלובים מבוסס על עקרון האנרגיה הפוטנציאלית המינימלית. כל מערכת פיסיקלית שואפת (בשיווי משקל) למינימום אנרגיה. כאשר יש מגוון מצבים אפשריים שהמערכת יכולה להימצא בהם, המערכת תשאף למצב בעל האנרגיה הפוטנציאלית הנמוכה ביותר (כל עוד המערכת יכולה לעבור בקלות בין המצבים).

בשתי נקודות המצויות באותו עומק בנוזל אחיד, נמצא לחץ הידרוסטטי זהה. לחץ זה נגרם על ידי עמוד הנוזל באורך העומק, שם נמדד הלחץ.

כאשר יש לנו שני כלים (או יותר) המחוברים כך שיכול לעבור נוזל מכלי אחד לשני, הכלים יתמלאו בנוזל כך שבכל זמן נתון גובה מפלס הנוזל בכל כלי יהיה זהה לגובה בכל הכלים, בלי שום קשר לצורת הכלים. כל טיפת נוזל שתתווסף לאחד הכלים, "תנוע" למקום בו יש לה אנרגיה פוטנציאלית מינימלית (המקום הנמוך ביותר בין כל הכלים).

<u>גבוה פני הים:</u> גובה פני הים (בכל הימים המחוברים זה לזה) בכל רחבי כדור הארץ כמעט אחיד (מלבד השפעות של גאות ושפל והפרשי מליחות).לכן, עלייה (או ירידה) בגובה מפלס במקום מסוים, תשפיע בהתאם על כל שאר המקומות.

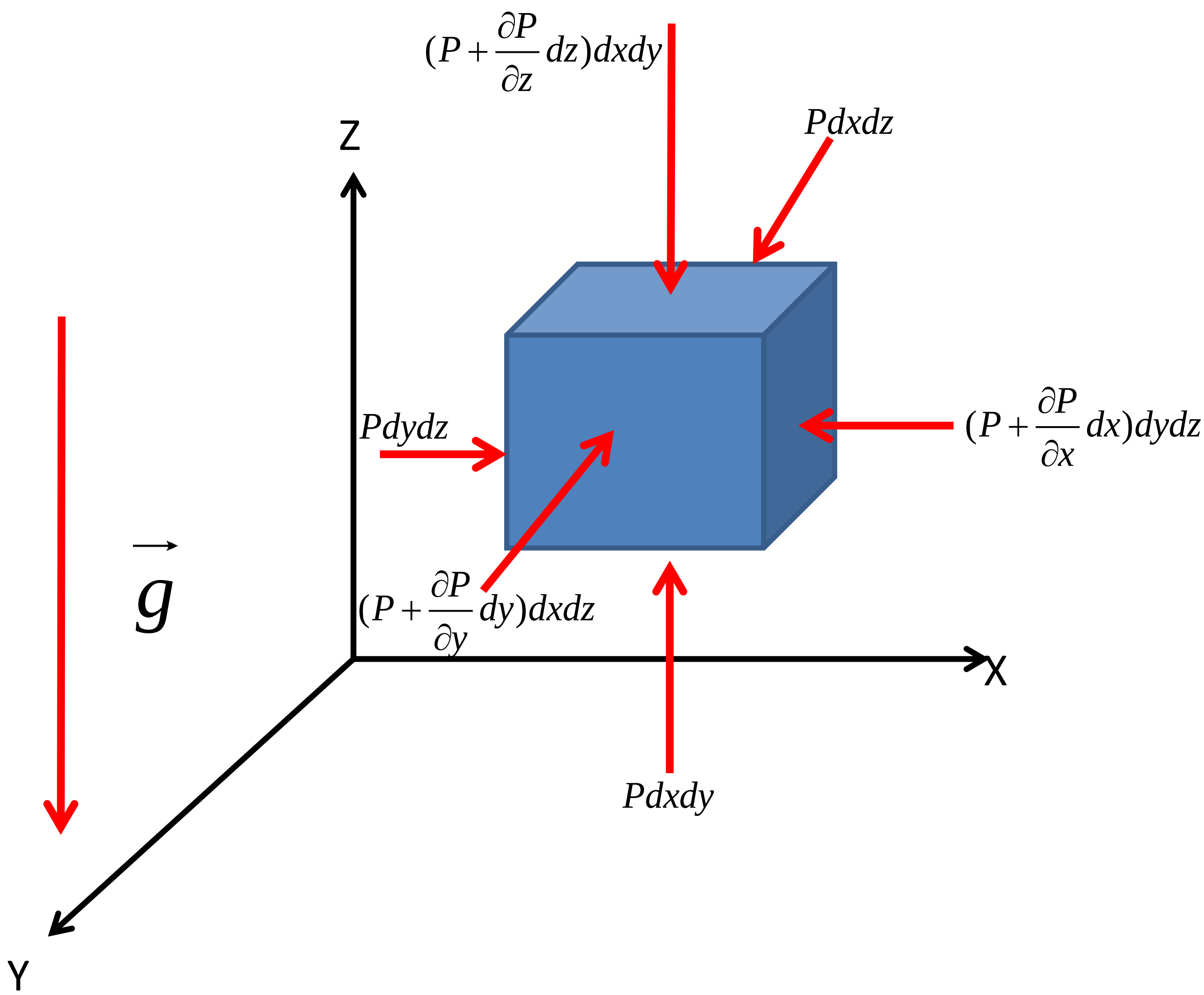
<u>התמוססות הקרחונים:</u> התמוססות הקרחונים בקטבים, תביא לעלייה משמעותית בגובה פני הים **בכל כדור הארץ**! איים נמוכים (איים טרופיים במיוחד) ומדינות נמוכות (הולנד, ונציה שבאיטליה) יכולים להתכסות במים...

<u>הים התיכון:</u> הים התיכון מחובר לאוקיינוס האטלנטי דרך מיצר גיברלטר. לשנים יש צורה (עומק, רוחב) שונה לחלוטין. ניתן לדמות זאת לשני כלים שלובים. עצם החיבור קובע שגובה פני הים התיכון וגובה פני האוקיינוס האטלנטי ישאפו להיות זהים. היום והים התיכון קטן הרבה יותר ורדוד הרבה יותר מהאוקיינוס האטלנטי והים שוכן באזור חם יחסית טמפרטורת המים שבו תהיה גבוהה מטמפרטורת המים באוקיינוס. מנתון זה מבינים כי קצב אידוי המים בים התיכון גדול יותר מזה שבאוקיינוס. אלמלא הים היה מחובר לאוקיינוס, הים התיכון היה מתאדה ומצטמק! [כפי שקרה לפני כ-6 מיליון שנה – "**האירוע המסיני**" (על שם העיר מסינה שבאיטליה) – אירוע גיאולוגי בוא נסגרו מיצרי גיברלטר לזרימת מים וכתוצאה מכך התייבש הים התיכון כמעט לחלוטין.]. אם כן, הים התיכון מאבד כמות מים גדולה, לכן יש תנועת מים בקצב גדול מהאוקיינוס האטלנטי לכיוון הים התיכון.

<u>הבדל בין נוזלים:</u> בהינתן שני כלים שלובים ריקים, אם נתחיל למלא **במים** כלי אחד ומעבר המים לכלי השני אפשרי, גובה מפלס המים בשני הכלים יהיה זה בכל רגע נתון. להבדיל, אם נמלא את הכלי הראשון בנוזל שהוא **צמיג** (דבש למשל) יקח זמן לא מבוטל עד שיגיע שוויון הגבהים בין שני המפלסים, אך הוא יגיע בסופו של יום.

5. **<u>שינוי לחץ באטמוספירה בין 2 נקודות סמוכות:</u>** נסתכל על אלמנט נפח נוזלי אשר מואץ לו אי שם באטמוספירה. כפי שראינו, הלחץ על כל פאה של חלקיק נוזל זה, זהה מכל כיוון (על כל פאה): $P = P_x = P_y = P_z$. הגוף נמצא בשדה גרביטציה ובעל תאוצה פנימית (a_x, a_y, a_z).

היות ויש תאוצה לחלקיק, יוצרו הפרשי לחצים בין כל שת פאות נגדיות. נניח כי על פאות נגדיות יפעל לחץ $P, P+\Delta P$.



ניישם את החוק השני של ניוטון על האלמנט נוזל בכל רכיב בנפרד:

$$\sum_i F_i = Ma_i$$

$$x:\ Pdydz - (P + \frac{\partial P}{\partial x}dx)dydz = \rho dxdydza_x$$

$$y:\ Pdxdz - (P + \frac{\partial P}{\partial y}dy)dxdz = \rho dxdydza_y$$

$$z:\ Pdxdy - (P + \frac{\partial P}{\partial z}dz)dxdy = \rho dxdydza_z + \rho dxdydz\vec{g}$$

אם כן, קיבלנו 3 משוואות. נפשט כל משוואה ונקבל:

$$x:\ -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \rho dxdydza_x \xrightarrow{\cdot(-1)} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$y:\ -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz = \rho dxdydza_y \xrightarrow{\cdot(-1)} \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y$$

$$z:\ -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz = \rho dxdydza_z + \rho dxdydzg \xrightarrow{\cdot(-1)} \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(a_z + g)$$

נכתוב את כל מה שמצאנו עד כה:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(a_z + g)$$

כעת, מ-3 משוואות אלו ניתן לכתוב דיפרנציאל (dP) עבור הלחץ.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

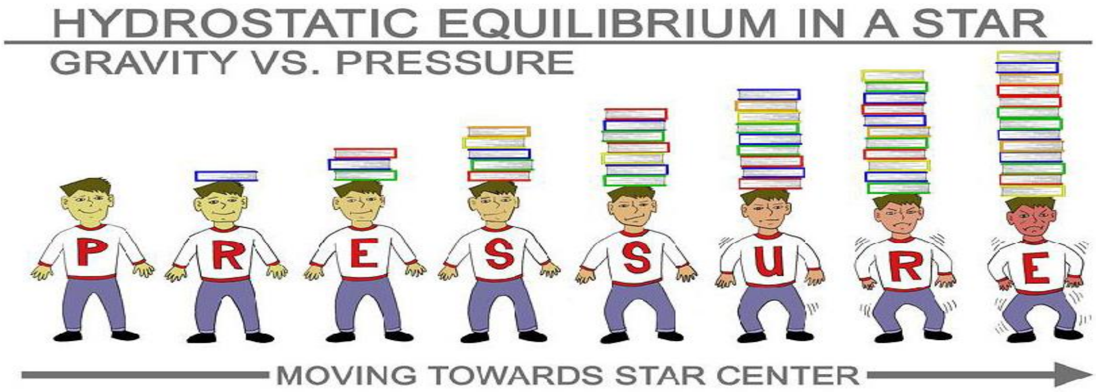
$$\boxed{dP = -\rho a_x dx - \rho a_y dy - \rho(a_z + g)}$$

במצב הידרוסטטי בשיווי משקל (תאוצה פנימית שווה אפס), הנוזל יושפע אך ורק מתאוצת הכובד. נקבל אם כך את משוואת שיווי המשקל ההידרוסטטי:

$$\boxed{dP = -\rho g dz}$$

משוואה זאת חשובה מאוד! משוואה זו היא הבסיס להבנת היווצרות כוכבים. כאשר ערפילית גז מתכנסת למצב של שיווי משקל הידרוסטטי, הלחץ וכח

הכובד משחקים אחד מול השני (פיזור הגזים אל מול התלכדות של גזים לכדי היווצרות protostar (אב כוכב).



ראינו כי משוואת המצב של גז אידיאלי היא: $P=\rho KT$ כאשר K הוא קבוע בולצמן.

נחשב לפי משוואת המצב של גז אידיאלי, המקנה לנו קשר בין הלחץ לצפיפות חומר, איך משתנה הלחץ כתלות בגובה:

$$dP=-\rho g dz \xrightarrow{\rho=\frac{P}{KT}} dP=-\frac{Pg}{KT}dz \xrightarrow{:P} \frac{dP}{P}=-\frac{g}{KT}dz$$

נבצע אינטגרציה, על שני האגפים:

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P}=-\int_{0}^{z}\frac{g}{KT}dz \longrightarrow \ln(P)-\ln(P_0)=-\frac{gz}{KT} \xrightarrow{\ln(a)-\ln(b)=\ln\frac{a}{b}} \ln(\frac{P}{P_0})=-\frac{gz}{KT}$$

$$\xrightarrow{EXP} e^{\ln(\frac{P}{P_0})}=e^{-\frac{gz}{KT}} \xrightarrow{e^{\ln x}=x} \frac{P}{P_0}=e^{-\frac{gz}{KT}} \xrightarrow{\cdot P_0} \boxed{P=P_0e^{-\frac{gz}{KT}}}$$

הלחץ יורד עם הגובה – כפי שתיארנו רבות עד עכשיו.

6. היות ומים לא נשפכים החוצה (מה שאומר שיש שימור חומר), נפח האוויר נשאר זהה.

צורת הנוזל במצב של שיווי משקל היא פרבולואיד. נשתמש במשפט הבא: ״נפח פרבולואיד קטום הוא חצי מנפח הגליל החוסם אותו״.

נפח האוויר לפני סיבוב הדלי היה $\pi R^2 a$. לאחר הסיבוב, נפח האוויר שווה לנפח של הפרבולואיד וזה שווה לחצי מנפח הגליל החוסם אותו.

ניתן להסתכל על זה מנקודת מבט נוספת: אם נחסר מנפח הדלי את נפח המים נקבל את הנפח בו אין מים. היות ומים לא נשפכים מחוץ לדלי, אלא מגיעים רק לפתחו, הנפח המדובר לא ישתנה.

נציג את נפח הגליל החוסם על ידי גובה h ורדיוס R: $\pi R^2 h$.

לכן נוכל לכתוב משוואה פשוטה המייצגת את שימור האוויר בתוך הגליל.

$$\pi R^2 a = \frac{1}{2}\pi R^2 h \longrightarrow h = 2a = 4cm$$

ניזכר עתה בבעיית הדלי המסתובב (אותה אצטרף בקרוב לחוברת) ונכתוב את הקשרים שמצאנו.

מחוק Pascal מצאנו את הקשר בין הלחץ על שפת הנוזל לנקודה מתחתיו במרחק h:

$$P = \rho g h$$

מבעיית הדלי המסתובב קיבלנו את הקשר הבא:

$$P = \frac{\rho\Omega^2}{2} R^2$$

שילוב שני קשרים אלו מניב לנו את הקשר הבא:

$$z = \frac{\Omega^2}{2g} R^2$$

מקשר זה, בין גובה הנוזל לרדיוסו, נמצא את המהירות הזוויתית בו הנוזל מסתובב בדלי.

$$h = \frac{\Omega^2}{2g} R^2 \longrightarrow \Omega = \pm\sqrt{\frac{2GH}{R^2}} \longrightarrow \Omega = 5.53\frac{rad}{\sec}$$

נחפש עתה מהו הכח F הפועל על תחתית הדלי.

$$P_{bottom} = P_0 + \frac{\Omega^2}{2g}(r^2 - r_1^2)\Big|_{r_1=0} \longrightarrow P_{bottom} = P_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2$$

כח F, זהו אינטגרל משטחי של הלחץ P, מעל משטח S (במקרה שלנו S הוא

מעגל ברדיוס R). והחישוב:

$$F=\int_0^R\int_0^{2\pi}P_{bottom}rdrd\theta=\int_0^R\int_0^{2\pi}(P_0+\frac{\Omega^2}{2g}r^2)rdrd\theta=2\pi\left[P_0\frac{R^2}{2}+\frac{\Omega^2}{2g}\bullet\frac{R^4}{4}\right]$$

$$P_0=\rho g\Delta h\xrightarrow{\rho=1000\frac{kg}{m^3}}P_0=9.8\frac{m}{\sec^2}\bullet1000\frac{kg}{m^3}\bullet(H-h)=1764\frac{kg}{m\cdot\sec^2}=1764Pa$$

כאשר Pa אלו יחידות נוספות של לחץ הנקראות "פסקל".

כעת נציב את כל הנתונים שקיבלנו ונחשב את הכח הפועל על משטח הדלי.

$$F=2\pi\left[P_0\frac{R^2}{2}+\frac{\Omega^2}{2g}\bullet\frac{R^4}{4}\right]=2\pi\left[1764\frac{0.16^2}{2}+\frac{5.53^2}{2\bullet9.8}\bullet\frac{0.16^4}{4}\right]=157.6N$$

<u>שאלה למחשבה:</u>

אילו המיכל היה מלא בנוזל והמיכל היה סגור במכסה, איך הייתם מתארים את

תנועת הנוזל? מה היה קורה ללחץ בתוך המיכל?

פרק 2: משוואת ברנולי

2.1. מסה, שטף ומשוואת הרציפות

נגדיר את המסה ואת השטף באמצעות חשבון אינטגרלי.

$$M = \iiint_{\tau} \rho(\vec{r},t)d\tau$$

$$\Phi = \oiint_{S} (\rho\vec{V})\overrightarrow{dS}$$

חוק שימור המסה אומר לנו שהשינוי במסה ליחידת זמן הוא השטף.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\Phi$$

נציב את הגדרת הגדלים בתוך המשוואה המקשרת בינם.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\Phi \longrightarrow \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} d\tau = -\oiint_{S} (\rho\vec{V})\overrightarrow{dS} \longrightarrow \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} d\tau + \oiint_{S} (\rho\vec{V})\overrightarrow{dS} = 0$$

נעזר במשפט הדיברגנץ שאותו אתם אמורים להכיר.

$$\boxed{\textit{Divergence Theorem}: \oiint_{S} (\vec{V})\overrightarrow{dS} = \iiint_{\tau} div(\vec{V})d\tau}$$

אם עדיין לא נתקלתם במושג הדיברגנץ, אני ממליץ לכם לקרוא על משמעות הדיברגנץ, שימושי משפט הדיברגנץ והקשר שלו לפיסיקה.

$$\iiint_{\tau}\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}d\tau+\oiint_{S}(\rho\vec{V})\overrightarrow{dS}=0\xrightarrow{\text{Divergence Theorem}}\iiint_{\tau}\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}d\tau+\iiint_{\tau}div(\rho\vec{V})d\tau=0$$

$$\iiint_{\tau}\left(\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}+div(\rho\vec{V})\right)d\tau=0\longrightarrow\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}+div(\rho\vec{V})=0$$

$$\boxed{Continuity\ \ Equation:\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}+div(\rho\vec{V})=0}$$

קיבלנו את משוואת הרציפות עבור נוזל עם צפיפות ρ.

ניתן להגדיר מהי צפיפות הזרם על ידי J: $\vec{J}=\rho\vec{V}$.

2.2 חוק שימור המסה/שטף התנע

כמות החומר שעובר דרך חתך 1 ביחידת זמן תהיה זהה לכמות החומר שעובר בחתך 2 ביחידת זמן.

$$\boxed{\rho_1V_1S_1=\rho_2V_2S_2\xrightarrow{\rho_1=\rho_2}V_1S_1=V_2S_2}$$

2.3. קווי זרימה, קווי מסלול וזרימה סטציונרית

1. **מציאת קווי הזרימה (Streamlines):**

קו זרימה, זהו קו, שבכל רגע נתון, וקטור המהירות משיק לקו זה. לא ניתן "לצלם" קו זרימה!

$$\vec{V}\times\overrightarrow{dr}=0\longrightarrow\frac{dx}{V_x}=\frac{dy}{V_y}=\frac{dz}{V_z}$$

2. **מציאת קווי מסלול (*Path lines*):**

אוסף כל הנקודות שדרכן עובר החלקיק. לפי קווי המסלול ניתן לראות את ההיסטוריה של החלקיק.

$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$
$$V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$
$$V_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

3. **זרימה סטציונרית (*steady flow*):**

אם קווי הזרימה יהיו זהים לקווי המסלול אזי, זאת זרימה סטציונרית.
עצם העובדה שהזרימה היא זרימה סטציונרית נוכל להשתמש במשוואת ברנולי!!
זרימה סטציונרית מצביעה לנו על כך שהגדלים: לחץ, מהירות, צפיפות הנוזל – לא תלויים בזמן (*Steady Flow*). ניתן לצלם את הזרימה והתמונה לא תשתנה לאחר זמן.

2.4. משוואת ברנולי

משוואת ברנולי קרויה על שם המתמטיקאי השוויצרי *Daniel Bernoulli*.

זוהי משוואה בסיסית וחשובה בהידרודינמיקה ובאווירודינמיקה המתארת את צורת הזרימה של נוזל ניוטוני או גז ניוטוני.

עקרון ברנולי קובע כי ככל שמהירות זרימתו של זורם (נוזל או גז) **על גבי משטח** גבוהה יותר, הזורם יפעיל פחות לחץ על המשטח.

עקרון ברנולי קובע כי:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi = const_c \quad / \quad \frac{\rho V^2}{2} + P + \rho\Phi = const_c$$

כאשר הפוטנציאל מוגדר כך שהכח שווה למינוס גרדיאנט הפוטנציאל.

$$\begin{bmatrix} \vec{F} = -grad\left(\Phi\right) \\ \vec{F}_{gravity} = \left(0,0,-g\right) \end{bmatrix} \longrightarrow \Phi = gz \longrightarrow \frac{\rho V^2}{2} + P + \rho gz = const_c$$

משמעותה של משוואת ברנולי היא כי בכל נקודה על קו זרימה c כלשהו הברנולי תמיד נשמר. קרי, הקבוע $const$ עבור קו זרימה ספציפי, יישאר קבוע ורק ערכי המחוברים במשוואה ישתנו בהתאם.

מתי מותר להשתמש בעקרון ברנולי?

א. כאמור, על קו זרימה ספציפי של הנוזל. אפשר לומר, עבור חלקיק בזמנים שונים

ב. הנוזל אינו צמיג – משמע, אין איבוד אנרגיה.

ג. הנוזל בלתי דחיס – צפיפות הנוזל קבועה.

ניתן אם כן להשוות את הברנולי בין שתי נקודות, אך בזמנים שונים, הנמצאות על קו זרימה משותף.

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} + gz_1 = \frac{V_2^{\ 2}}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} + gz_2$$

2.5. דוגמאות:

1. יש למצוא את קווי הזרימה (*streamlines*) ואת קווי המסלול (*path lines*) של נוזל עם שדה מהירות $\vec{V}=\left(v_x,v_y,\ v_z\right)$.

$$v_x=a+bt \quad v_y=c \quad v_z=0$$

כאשר c, b, a קבועים.

האם זוהי זרימה סטציונרית (*steady flow*)?

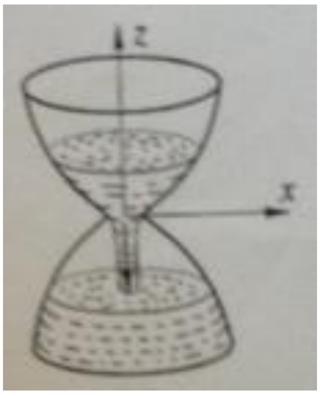
2. נתון שדה מהירות V. יש למצוא את קווי הזרימה.

$$\vec{V}=\left(v_x,v_y\right)$$
$$v_x=2yt \quad v_y=x$$

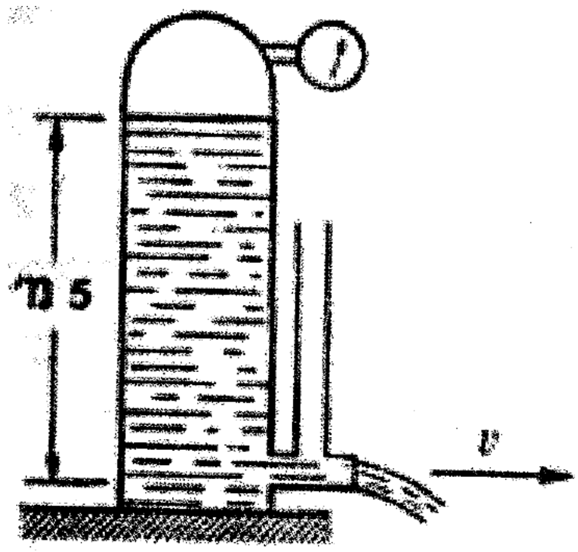
3. שני דפי נייר מוחזקים במקביל אחד לשני באוויר בכיוון כח הכובד.

לוקחים נשימה ונושפים את האויר בין הדפים, כך שזרימת האויר מקבילה לדפים (כמתואר בציור).
יש לתאר מה יקרה – האם הדפים יתרחקו או יתקרבו אחד לשני? נמק/י!
קודם כל בדקו זאת, אחר כך חשבו מדוע.
(שאלה 1 מבחן 2012 מועד א')

4. גובה המים בשעון מים משמש כמד זמן. כדי שהשעון יעבוד, רמת המים צריכה לרדת <u>במהירות קבועה</u> (בלתי תלויה בזמן). מה צריכה להיות צורת מיכל המים $R(h)$ (רדיוס כפונקציה של הגובה) כדי שתנאי זה יתקיים?
(שאלה 1 מבחן 2011 מועד א')



5. במיכל סגור עומדים מים בגובה 5 מטרים.



בתחתית המיכל צינור מוצא קצר.

א. מה חייב להיות הלחץ של האוויר מעל המים שבמיכל כדי שהמים יזרמו מן המוצא במהירות של 12 מטר לשנייה? צפיפות המים היא 1 גרם לסמ"ק. ניתן להניח כי שטח החתך במוצא קטן בהרבה משטח החתך של המים במיכל.

ניתן להזניח את השינוי בגובה פני המים בזמן התהליך.

ב. מהם חוקי השימור שהשתמשת? יש להסביר איך פועל כל חוק בשאלה זו.

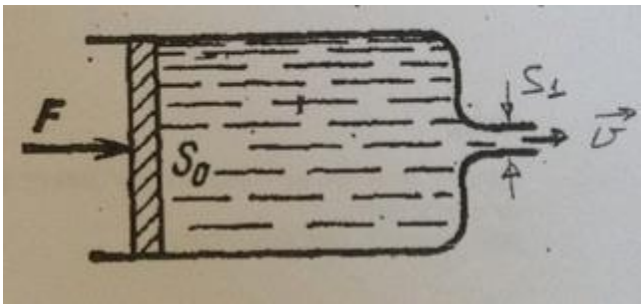
ג. סמוך לפתח המיכל מחובר צינור זקוף. עד לאיזה גובה יעלו המים בצינור הזקוף?

רמז: מהי התפלגות הלחצים בצינור המוצא אם לא נחבר אליו את הצינור הזקוף?

(שאלה 3 מבחן 2007 מועד ב')

6. נוזל אידיאלי, בלתי דחיס נמצא בתוך מזרק. על בוכנת המזרק מופעל כח קבוע $\vec{F}$, כפי שמתואר בציור. ניתן להניח ששטח החתך של השפופרת S_0 גדול בהרבה משטח החתך של המחט S_1. מצאו את מהירות הנוזל היוצא מהמחט. אין חיכוך בין הבוכנה והשפופרת.

(שאלה 1 מבחן 2011 מועד ב')



7. כמה זמן יקח למיכל בצורת גליל (רדיוס R), אשר מלא מים עד לגובה H להתרוקן מחור בתחתית ברדיוס a?

8. יש להסביר כיצד פועל עיקרון ברנולי על כנף של מטוס.

9. (המשך שאלה 7) נתון גליל עם פקק בתחתית. יש למצוא את מהירות הזורם כפונקציה של הזמן.

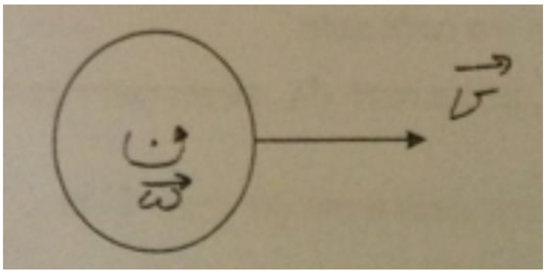
קוטר הגליל הוא A , קוטר החור בתחתית הוא a כאשר $A \gg a$.

שימו לב כי מהירות ירידת מפלס המים ומהירות יציאת המים דרך החור בתחתית וגובה המים כולם תלויים בזמן t.

<u>דרך פתרון:</u>

- חוק שימור המסה/שטף
- שוויון לחצים
- שימור ברנולי
- קינמטיקה

10. גליל נע במים (בכיוון מאונך לציר הסימטריה) במהירות $\vec{v}$ ובו זמנית מסתובב סביב ציר הסימטריה, כפי שמתואר בציור.



לאיזה כיוון פועל כח העילוי?

הדרכה:

א. ציירו את קווי הזרימה עבור גליל שמסתובב במקום.

ב. ציירו את קווי הזרימה עבור גליל הנע במהירות קבועה (בלי להסתובב).

ג. ציירו סופרפוזיציה של שני המקרים.

ד. השתמשו במשוואת ברנולי על מנת למצוא באיזה צד של הגליל יש לחץ גדול יותר.

ה. הסבירו לאן פועל כח העילוי.

(שאלה 2 מבחן 2011 מועד ב׳)

11. איך תשתנה תשובתך לשאלה מספר 10 במקרים הבאים:
   א. רק הכיוון של המהירות $\vec{v}$ מתהפך.
   ב. רק הכיוון של מהירות הסיבוב $\vec{\omega}$ מתהפך.
   ג. שני הכיוונים של שתי המהירויות הנ"ל מתהפכים.

(שאלה 2 מבחן 2011 מועד ב' – בונוס)

12. כדור מתגלגל על מישור.
   א. יש לצייר את קווי המסלול.
   ב. יש לצייר את קווי הזרימה ביחס לנקודת ההשקה של הכדור והמישור.

2.6. פתרונות לדוגמאות:

1. זרימה סטציונרית.

א. מציאת קווי הזרימה (Streamlines):

קו זרימה, זהו קו, שבכל רגע נתון, וקטור המהירות משיק לקו זה. לא ניתן "לצלם" קו זרימה!

$$\vec{V}\times\vec{dr}=0 \longrightarrow \frac{dx}{V_x}=\frac{dy}{V_y}=\frac{dz}{V_z}$$

אין לנו מהירות בכיוון z.

$$\frac{dx}{V_x}=\frac{dy}{V_y}\longrightarrow\frac{dx}{a+bt}=\frac{dy}{c}\longrightarrow\int_{x_0}^{x_1}cdx=\int_{y_0}^{y_1}(a+bt)dy\longrightarrow c(x-x_0)=(a+bt)(y-y_0)$$

$$\boxed{(y-y_0)=\frac{c(x-x_0)}{(a+bt)}}$$

קווי המסלול הם קו ישר y(x).

ב. מציאת קווי מסלול (Path lines):

אוסף כל הנקודות שדרכן עובר החלקיק. לפי קווי המסלול ניתן לראות את ההיסטוריה של החלקיק.

$$V_x=\dot{x}=\frac{dx}{dt}\longrightarrow a+bt=\frac{dx}{dt}\longrightarrow\int_{x_0}^{x}dx=\int_{t_0}^{t}(a+bt)dt\longrightarrow x-x_0=at+\frac{1}{2}bt^2-(at_0+\frac{1}{2}bt_0^{\,2})$$

$$x-x_0=a(t-t_0)+\frac{1}{2}b(t^2-t_0^{\,2})\longrightarrow\boxed{x-x_0=(t-t_0)(a+\frac{1}{2}b(t+t_0))}$$

$$V_y=\dot{y}=\frac{dy}{dt}\longrightarrow c=\frac{dy}{dt}\longrightarrow\int_{y_0}^{y}dy=\int_{t_0}^{t}cdt\longrightarrow\boxed{y-y_0=c(t-t_0)}$$

נחלק את שתי התוצאות שבמסגרת ונקבל תלות בין x ו- y.

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{c\,\cancel{(t-t_0)}}{\cancel{(t-t_0)}\,(a+\frac{1}{2}b(t+t_0))}\xrightarrow{\cdot(x-x_0)}\boxed{y-y_0=\frac{c(x-x_0)}{(a+\frac{1}{2}b(t+t_0))}}$$

ניתן לראות כי קווי הזרימה וקווי המסלול שונים. זוהי **לא זרימה סטציונרית** (הגדלים ההידרודינמיים תלויים בזמן).

2. מכפלה וקטורית בין וקטור המהירות לבין דיפרנציאל ההעתק שווה אפס.

$$\vec{V}\times\vec{dr}=0$$

$$\vec{V}\times\vec{dr}=\left\|\begin{pmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ v_x&v_y&v_z\\ dx&dy&dz\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ 2yt&x&0\\ dx&dy&0\end{pmatrix}\right\|=\hat{z}(2ytdy-xdx)=0$$

$$2ytdy=xdx$$

$$\int_{y_0}^{y}2ytdy=\int_{x_0}^{x}xdx$$

$$t(y^2-y_0^{\,2})=\frac{x^2-x_0^{\,2}}{2}$$

$$\boxed{ty^2-\frac{x^2}{2}=const}\longrightarrow Hyperbula$$

3. כאשר ננשוף אוויר בין שני הדפים, כך שמהירות האוויר מקבילה לדפים, יתקרבו הדפים אחד לשני.

אחרי שנשפתם והתוודעתם לכך שהדפים אכן מתקרבים זה לזה, נסביר מדוע.

נבדיל בין שני קווי זרימה: אחד הנמצא בחלקו הפנימי של אחד הדפים (במקביל לדף) והשני מצדו השני של הדף.

נשווה כעת בין שני גדלים רלוונטיים המופיעים במשוואת ברנולי: מהירות ולחץ (היות והחלק הנובע מהאנרגיה פוטנציאלית לא משחק תפקיד במקרה זה).

לגבי פרופיל המהירות: המהירות המשיקית מצדו הפנימי של הדף גבוה בהחלט מזו שבצדו החיצוני. היות וזה "משחק" בין שני גדלים בלבד, הלחץ מצדו החיצוני של הדף גובר על הלחץ מצדו הפנימי של הדף, ועל כן נוצר "כח" חיצוני כלפי פנים , הדוחק בדפים להתקרב אחד לכיוון השני. התופעה מזכירה במקצת את רעיון התרוממות המטוס.

4. נסתכל על 2 נקודות לשם השוואה: נקודה 1 שהיא על פני הנוזל (למעלה) בגובה z_1 ונקודה 2 שהיא בצוואר הבקבוק – במעבר למצב בו הנוזל נופל נפילה חופשית. נקרא לגובה של נקודה 2 z_2.

נשתמש בשני חוקי שימור שלמדנו: חוק שימור המסה/שטף התנע וחוק שימור הברנולי.

<u>חוק שימור המסה/שטף התנע:</u>

$$\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2 \xrightarrow{\rho_1=\rho_2} V_1 S_1 = V_2 S_2 \xrightarrow{S=\pi R^2} V_1 \pi R_1^{\,2} = V_2 \pi R_2^{\,2} \longrightarrow V_2 = V_1 \bullet \frac{R_1^{\,2}}{R_2^{\,2}}$$

אם כך, מצאנו קשר בין מהירות הנוזל בצוואר הבקבוק לבין המהירות על פני הנוזל.

<u>חוק שימור הברנולי של חלקיק:</u>

ישנו קו זרימה אשר מתחיל בנקודה 1 ומגיע לנקודה 2. נשווה את הברנולי של החלקיק בין שתי נקודות אלה, נציב את הקשר בין שתי המהירויות שמצאנו דרך שימור שטף התנע לעיל ונמצא את $R(z)$ שמייצג לנו את צורת שעון המים כפונקציה של הגובה z.

$$\frac{V_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho_1}+gz_1=\frac{V_2^2}{2}+\frac{P_2}{\rho_2}+gz_2 \xrightarrow{\rho_1=\rho_2} \frac{V_1^2}{2}+\frac{1}{\rho}(P_1-P_2)+g(z_1-z_2)=\frac{1}{2}V_1^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4$$

$$\xrightarrow{\cdot\frac{2R_2^4}{V_1^2}} R_1^4=R_2^4+\frac{2R_2^4}{V_1^2}\left[\frac{(P_1-P_2)}{\rho}+g\Delta z\right] \xrightarrow{\sqrt[4]{\ }} \boxed{R_1=R_2\sqrt[4]{1+\frac{(P_1-P_2)}{\rho V_1^2}+\frac{2g\Delta z}{V_1^2}}}$$

5. פתרון בהמשך...

6. היות ומופעל כח קבוע על הבוכנה, נוכל למצוא את הלחץ שכח זה יוצר:

$$F_{const}=P_0S_0 \longrightarrow P_0=\frac{F}{S_0}$$

כמו בשאלות הקודמות, כדי למצוא את הקשר בין מהירות היציאה של הנוזל מהמזרק לבין הלחץ שנוצר עליו, בין צפיפות הנוזל ובין צורת המזרק, נשתמש בשני החוקים שהכרנו: חוק שימור שטף התנע ובמשוואת ברנולי.

מחוק שימור שטף התנע (כאשר אנחנו משווים בין המשטח של בוכנת המזרק לבין המחט – משם יוצא הנוזל) נקבל:

$$\rho V_0S_0=\rho V_1S_1 \xrightarrow{:\rho} V_0S_0=V_1S_1 \xrightarrow{:S_0} V_0=V_1\frac{S_1}{S_0}$$

מהבנה בסיסית של החוקים שלמדנו עד כה, ניתן להסיק שמהירות היציאה תהיה גבוה יותר מהמהירות ההתחלתית של הנוזל על הבוכנה הנובעת מהכח המופעל. בנוסף, הלחץ בנקודת היציאה יהיה נמוך יותר.

$$V_0<V_1 \quad P_1<P_0$$

עוד ניתן לומר שהלחץ ביציאה מהמזרק הוא הלחץ האטמוספירי.

$$P_1=P_{atm}$$

ממשוואת ברנולי נקבל את מהירות יציאת הנוזל מהמזרק:

$$\frac{V_0^{\ 2}}{2}+\frac{P_0}{\rho_0}+gz_0=\frac{V_1^2}{2}+\frac{P_1}{\rho}+gz_1\xrightarrow{z_0=z_1}\frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2V_1^2-\frac{1}{2}\rho V_1^2=P_1-P_0\longrightarrow$$

$$V_1^2\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2-1\right]=P_1-\frac{F}{S_0}\longrightarrow V_1^2=\frac{2}{\rho}\left[\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2-1\right]^{-1}\left(P_1-\frac{F}{S_0}\right)\longrightarrow$$

$$V_1=\sqrt{\frac{2S_0^{\ 2}\left(\frac{F}{S_0}-P_1\right)}{\rho(S_0^{\ 2}-S_1^{\ 2})}}\xrightarrow{S_1\ll S_0,P_1=P_{atm}}\boxed{V_1\approx\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\frac{F}{S_0}-P_{atm}\right)}}$$

7. שלב ראשון: נשתמש בחוק שימור השטף ונקבל יחס בין מהירות היציאה בגובה אפס (נקודה 1) למהירות ההתחלתי בגובה z כלשהו (נקודה 2).

$$\rho_1V_1S_1=\rho_2V_2S_2\xrightarrow{\rho_1=\rho_2}V_1S_1=V_2S_2\xrightarrow{S=\pi R^2}V_1\pi R_1^{\ 2}=V_2\pi R_2^{\ 2}\xrightarrow{R_2=a,R_1=R}V_1=V_2\bullet\frac{a^2}{R^2}$$

כעת, ברנולי:

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2+P_1+\rho gz_1=\frac{1}{2}\rho V_2^{\ 2}+P_2+\rho gz_2\xrightarrow[P_1=P_2=P_{atm}]{z_2=0,z_1=z}\frac{1}{2}\rho V_1^2-\frac{1}{2}\rho V_2^{\ 2}=-\rho gz\xrightarrow{V_2=V_2(z)}$$

$$\frac{1}{2}\rho(V_1^2-V_2^{\ 2})=-\rho gz\longrightarrow V_2^{\ 2}-V_1^2=2gz$$

שימו לב!

קיבלנו משוואה שזכורה לנו מתחום הקינמטיקה:

$$V_2^{\ 2}-V_1^2=2gz$$

נקודה למחשבה: איך ניתן להקביל בין שני התחומים?

הגיע הזמן לאחד בין שתי המשוואות. נציב את המסקנה שקבלנו מהמשוואה הראשונה בתוך השנייה.

$$V_2^2 - V_1^2 = 2gz \xrightarrow{V_1 = V_2 \cdot \frac{a^2}{R^2}} (V_2)^2 - \left(V_2 \frac{a^2}{R^2}\right)^2 = 2gz$$

$$V_2^2(1 - \frac{a^4}{R^4}) = 2gz \longrightarrow V_2^2(\frac{R^4 - a^4}{R^4}) = 2gz$$

$$V_2^2 = 2gz(\frac{R^4}{R^4 - a^4}) \longrightarrow V_2 = \sqrt{2gz(\frac{R^4}{R^4 - a^4})}$$

$$V_2 = \sqrt{2g(\frac{R^4}{R^4 - a^4})}\sqrt{z} \xrightarrow{c = \sqrt{2g(\frac{R^4}{R^4 - a^4})}} \boxed{V_2(z) = c\sqrt{z}}$$

מצאנו כי, מהירות הנוזל תלויה בגובה בו הוא נמצא וכמובן ברדיוסים. נזכור כי המהירות היא אינטגרל של ההעתק:

$$V(z) = \frac{dz}{dt}$$

כדי למצוא את זמן ההתרוקנות של המיכל, נבצע אינטגרציה.

$$V_2(z) = \frac{dz}{dt} = c\sqrt{z} \longrightarrow \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^t c\,dt \longrightarrow 2(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}) = ct \xrightarrow{:c} \boxed{t = \frac{2}{c}(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1})}$$

כאשר נציב את $z_2 = H$ $z_1 = 0$ נקבל את זמן ההתרוקנות t^* של המיכל:

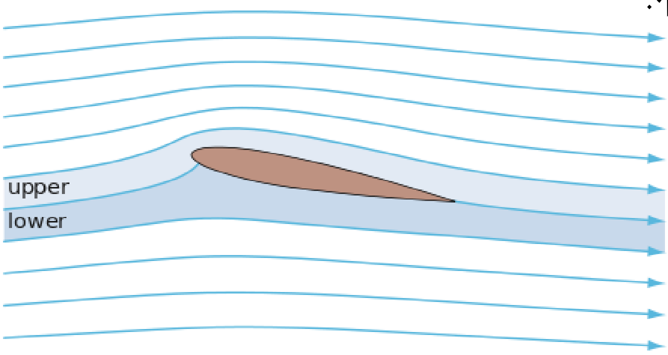
$$\boxed{t^* = \frac{2}{c}\sqrt{Hz}}$$

8. עקרון ברנולי – כנף של מטוס

מנוע של מטוס שטס אופקית מפעיל כח על הציר האופקי. אם כך איך המטוס מחזיק מעמד באוויר? רעיון התעופה טמון במבנה הכנף!

נתבונן בכנף של מטוס ברגע שהכנף מגיע לאוויר, האוויר מתפצל לשתיים – חלק הולך מעל הכנף וחלק הולך מתחת לכנף.

ניתן לראות כי דרכו של האוויר בחלקו העליון של הכנף ארוכה מדרכו של החלקיק בחלקו התחתון של הכנף.



על כן מהירות האוויר על חלקה העליון של הכנף תהיה גבוהה ממהירות האוויר מתחת לכנף. לפי עקרון ברנולי, הלחץ למעלה יהיה נמוך מהלחץ מתחת לכנף. מסיבה זו יפעל כח עילוי על הכנף בפרט ועל המטוס בכלל. קיים בנוסף הבדל בגבהים בין חלקה העליון של הכנף לחלקה התחתון, אך היות ומדובר במהירויות גבוהות מאוד ניתן להזניח את הפרשי הגובה.

9. בהמשך לשאלה 7: נרצה כעת למצוא את מהירות ירידת מפלס הנוזל כפונקציה של הזמן.

נחליף את גבול האינטגרל. במקום H נכתוב z כללי $z_1=0 \quad z_2=z$.

מהאינטגרציה נקבל: $t=\frac{2}{c}\sqrt{z}$. נציב את ביטוי זה בחזרה במשוואת המהירות שמצאנו קודם לכן.

$$V_2(z)=c\sqrt{z}\xrightarrow{t=\frac{2}{c}\sqrt{z}\longrightarrow\sqrt{z}=\frac{c}{2}t}V_2(z)=\frac{c^2}{2}t\xrightarrow{c=\sqrt{2g(\frac{R^4}{R^4-a^4})}}V_2(z)=\frac{\left(\sqrt{2g(\frac{R^4}{R^4-a^4})}\right)^2}{2}t$$

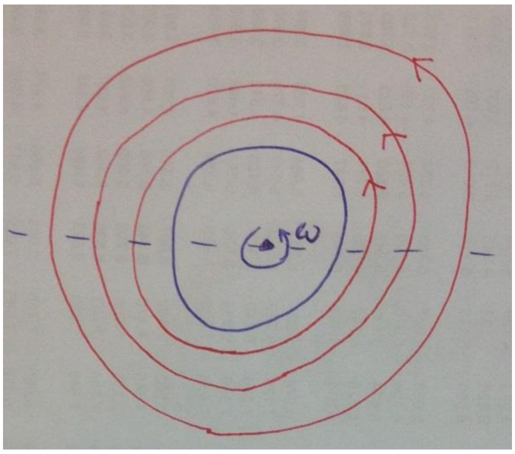
נקבל את הביטוי הסופי של מהירות ירידת מפלס הנוזל: $\boxed{V_2(z)=g(\frac{R^4}{R^4-a^4})t}$

10. נפרק את מהירות הגליל לרכיבים: מהירות קווית ומהירות סיבובית. נבדוק מהם קווי הזרימה בנפרד ואז נעשה סופרפוזיציה עבור שני הרכיבים.
תחילה, נרצה לדעת מהי משמעות הסופרפוזיציה.

<u>סופרפוזיציה:</u>

סופרפוזיציה היא תיאור מצב פיסיקלי על ידי פירוקו לסכום של מצבים שונים. מתי ניתן לעשות פירוק שכזה? עקרון הסופרפוזיציה ניתן להפעלה במערכת המתוארת על ידי משוואות לינאריות, היות וכך הפתרונות מקיימים בינם צירוף לינארי. בבעיות בנושאים שדה חשמלי, שדה מגנטי ושדה כבידה ניתן להשתמש בעקרון זה. למשל, בתורת הקוונטים ניתן לייצג את מצב המערכת על ידי פונקציית גל, שהיא סופרפוזיציה של מצבי הסיס האפשריים. את המקרה שלנו ניתן להקביל לבעיה בנושא השדה והפוטנציאל החשמלי.

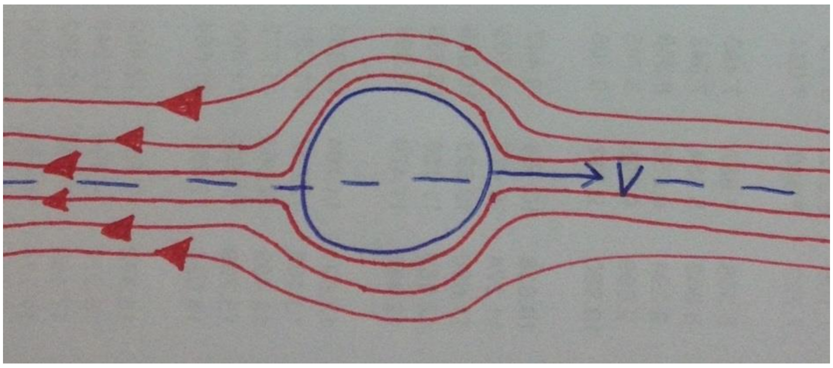
<u>תנועה סיבובית:</u>



הגליל מסתובב כנגד סיבוב השעון. כתוצאה מהסיבוב, הנוזל מסתובב באותו כיוון כנ"ל. ככל שצפיפות הקווים גדולה יותר, כך גודל המהירות גדול יותר. צפיפות הקווים גדולה יותר ככל שקרובים לגליל, היות וסמוך לגליל הנוזל מקבל את מהירותו הזוויתית של הגליל ואילו הרחק מהגליל (ניתן לומר באינסוף), הנוזל לא מושפע כלל מסיבוב הגליל ומהירותו היא אפס.

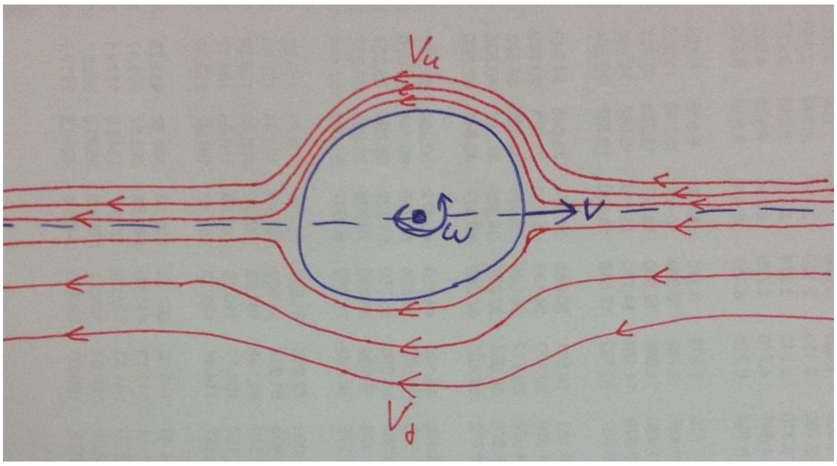
תנועה קווית:

הגליל נע בכיוון ימין. אותנו מעניינת תנועת הנוזל. אם כן, נאמר כי הגליל במנוחה והנוזל נע שמאלה (!) ביחס אליו. כפי שצוין קודם לכן, ככל שנתרחק מהגליל צפיפות הקווים תקטן ובכך נאמר כי הנוזל יגיב פחות לתנועת הגליל.



סופרפוזיציה:

נאחד בין שתי התנועות ונגלה כי, בחלקו העליון של הגליל ומעליו קווי הזרימה מצביעים לכיוון שמאלה. לעומת זאת, בחלק התחתון של הגליל, התנועה הסיבובית אומרת היימן! ואילו התנועה הקווית אומרת השמאל!



ידוע כי קווי זרימה לעולם נסגרים (או שהולכים לאינסוף). כאשר נשווה בין קו זרימה ש"מתפצל" או חלקיק ש"מתפצל" (אח"כ הוא מתאחד מחדש) בהגיעו לגליל נגלה כי, באזור שמעל הגליל, המהירות V_u גדולה יותר מהמהירות באזור שמתחת הגליל V_d.

בקיצור: $V_d < V_u$

היות והמהירויות מתנהגות בצורה זו מה נוכל לומר על הפרשי הלחץ בין החלק העליון לחלק התחתון?

ממשוואת ברנולי: $\frac{V^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz=const\ (for\ one\ streamline)$

במקרה שלנו, הקואורדינטה z לא משחקת תפקיד (הציורים הם במבט עילי! (אפשר גם להסתכל על זה כמבט מהצד ולהזניח את הפרשי הגבהים...)). לכן, אם המהירות מעל הגליל גדולה יותר מהמהירות מתחתיו אזי, הלחץ למטה יהיה גבוה מהלחץ שמעל הגליל. היות והלחץ למטה גבוה יותר מהלחץ למעל, יפעל כח (כח העילוי) שידחוף את הגליל כלפי מעלה.

11. משנים את כיווני המהירויות:

א. משנים את כיוון המהירות הקווית V. במקרה זה המהירות מתחת תהיה גדולה יותר מהמהירות מלמעלה ועל כן הלחץ למעלה יהיה חזק יותר מזה שלמטה. יפעל כח (הנובע מהפרשי הלחצים) כלפי מטה.

ב. משנים את כיוון המהירות הסיבובית (הפעם עם כיוון השעון). במקרה זה המהירות מתחת תהיה גדולה יותר מהמהירות מלמעלה ועל כן הלחץ למעלה יהיה חזק יותר מזה שלמטה. יפעל כח (הנובע מהפרשי הלחצים) כלפי מטה.

ג. משנים את הכיוונים לשני רכיבי המהירויות. לא יהיה שינוי בכיוון הכח. יוצר כח כלפי מעלה.

12. בהמשך...

פרק 3: עירבוליות וזרימה פוטנציאלית

3.1. עירבוליות *Vorticity*

העירבוליות מייצגת לנו את מידת הסיבוביות של זרימת הנוזל – עד כמה הנוזל נע בתנועה סיבובית. העירבוליות מסומנת באות היוונית - אומגה קטנה - $\vec{\omega}$ והיא מוגדרת כרוטור של וקטור המהירות.

או במילים אחרות, על ידי הקשר $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$.

3.2. זרימה פוטנציאלית *Potential Flow*

מתי ניתן להגדיר פוטנציאל זרימה? כאשר הזרימה שלנו היא זרימה פוטנציאלית ניתן להגדיר פוטנציאל זרימה. מהי זרימה פוטנציאלית? זאת זרימה ללא עירבוליות ($\vec{\omega} = 0$).

כיצד העירבוליות מוגדרת? הגדרנו את העירבוליות כרוטור (*curl*) של פרופיל המהירות. $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$.

מבחינה מתמטית, אם *curl(V)* מתאפס אזי, ניתן להגדיר אותו כגרדיאנט (*Gradient*) של פוטנציאל Φ.

$$\vec{V} \xrightarrow{\vec{\nabla}\times\vec{V}=0} \vec{V} = grad(\Phi) \xrightarrow{div} div(\vec{V}) = div(grad(\Phi)) \xrightarrow{By\ definition} div(\vec{V}) = \nabla^2(\Phi) = \Delta\Phi$$

אם נתון שהזרימה היא ללא עירבוליות (*Irrotational Flow*) אזי, $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$

אם נתון בנוסף **שהנוזל בלתי דחיס** (*Incompressible Fluid*) אזי, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

משוואת הרציפות לזורם (*Continuity Equation*): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\overrightarrow{\rho V}) = 0$ בהינתן כי זאת זרימה פוטנציאלית (משמע, ללא עירבוליות) של נוזל בלתי דחיס, נוכל להסיק את **משוואת לפלס (*Laplace Equation*):** $\nabla^2(\Phi) = \Delta\Phi = 0$.

3.3. נגזרת לגראנז'יאנית

$$\boxed{\frac{D\vec{\Im}}{Dt}=\frac{\partial\vec{\Im}}{\partial t}+(\vec{V}\,\overrightarrow{grad})\vec{\Im}}$$

זוהי הגדרה של נגזרת בתחום ההידרודינמיקה. כאשר $\frac{D\vec{\Im}}{Dt}$ מייצג שינוי תכונה וקטורית כלשהי, $\frac{\partial\vec{\Im}}{\partial t}$ מייצג שינוי בנקודה עצמה ו- $(\vec{V}\,\overrightarrow{grad})\vec{\Im}$ מייצג שינוי שבא כתוצאה ממעבר חלקיקים בגלל שדה המהירות (אדבקציה – *Advection*).

(הסבר כיצד הגענו להגדרת הנגזרת הלגראנז'יאנית יינתן בהמשך).

כך ניתן למצוא את התאוצה לפי מציאת הנגזרת הלגראנז'יאנית של המהירות.

$$\boxed{\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\,\overrightarrow{grad})\vec{V}}$$

3.4. דוגמאות

1. נתון פוטנציאל זרימה $\Phi=x^2+y^2+z^2$. יש לחשב את פרופיל המהירות שפוטנציאל זה מתאר.

2. נתונים שני שדות מהירות: $v(x,y,z)=\frac{\vec{r}}{r}$, $v(x,y,z)=(1,1,1)$
האם שדות אלו מתארים זרימה פוטנציאלית? (שאלה 1 מבחן 2010 מועד א')

3. נתון שדה מהירות V. $\vec{V}=2xy\,\hat{i}+4tz^2\,\hat{j}-yz\,\hat{k}$
בנקודה $(2,-1,1)$ ובזמן $t=2$ יש למצוא:
   א. תאוצה.
   ב. עירבוליות (*Vorticity*).

4. נתון פרופיל מהירות V. $\vec{V}=Ax\,\hat{i}-Ay\,\hat{j}$, $A>0$ האם הזרימה היא זרימה פוטנציאלית?

5. יש להוכיח כי אם שמים חלקיק (לא אינפיניטסימלי) וממקמים אותו בתוך נוזל הוא יסתובב עם מהירות זוויתית Ω השווה לחצי הערבוליות $\vec{\omega} = \mathrm{curl}\,\vec{v}$.
צ"ל: $\Omega = \omega/2$.

3.5. פתרונות לדוגמאות

1. נתון פוטנציאל זרימה: $\Phi = x^2 + y^2 + z^2$. כדי למצוא את פרופיל המהירות יש להפעיל $gradient$.

$$\vec{V} = grad(\Phi) = grad(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z} = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} + 2z\hat{z} = 2(x,y,z)$$

2. נתונים שדות מהירות: $v(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r}$, $v(x,y,z) = (1,1,1)$ האם שדות אלו מתארים זרימה פוטנציאלית? אם נקרא שוב, את מה שמוסבר בפסקאות הקודמות, נבין כי אם ה-$curl$ של המהירות מתאפס אזי, זאת זרימה פוטנציאלית, לה ניתן לכתוב פוטנציאל המוגדר כגרדיאנט של המהירות.

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left\| \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\| = 0 \Rightarrow \vec{V}\ Potential\ \ Flow$$

$$v(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left\| \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} \right\| = 0 \Rightarrow \vec{V}\ Potential\ \ Flow$$

(את החלק השני ניתן לפתור גם באמצעות קואורדינטות כדוריות).

3. נתונה המהירות.

א. נחשב את התאוצה על ידי נגזרת לגראנז'יאנית של המהירות. אחר כך נציב את הנקודה הרלוונטית.

$$\vec{a}=\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\,\overrightarrow{grad})\vec{V}\longrightarrow\vec{a}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

$$\vec{a}=4z^2\hat{j}+2xy(2y\hat{i})+4tz^2(2x\hat{i}-z\hat{k})-yz(8tz\hat{j}-y\hat{k})$$

$$\vec{a}=\hat{i}(4xy^2 8tz^2x)+\hat{j}(4z^2-8yz^2t)+\hat{k}(zy^2-4tz^3)$$

$$\boxed{\vec{a}_{(2,-1,1),t=2}=40\hat{i}+20\hat{j}-7\hat{k}}$$

ב. כפי שראינו, העירבוליות היא ה-*curl* של המהירות. נפעיל *curl* על המהירות ונמצא את העירבוליות. אחר כך נציב את הנקודה הרלוונטית

$$\vec{\omega}=\vec{\nabla}\times\vec{V}=\left|\begin{pmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ 2xy&4tz^2&-yz\end{pmatrix}\right|=(-z-8tz)\hat{i}-(0)\hat{j}+(-2x)\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{\omega}=(-z-8tz)\hat{i}-2x\hat{k}}\xrightarrow[t=2]{(2,-1,1)}\boxed{\vec{\omega}=-17\hat{i}-4\hat{k}}$$

4. נתון השדה מהירות הבא: $\vec{V}=Ax\hat{i}-Ay\hat{j}\ ,\ A>0$.

כדי לדעת אם זאת זרימה פוטנציאלית, נצטרך למצוא את קווי הזרימה וקווי המסלול.

אם קווי הזרימה יהיו זהים לקווי המסלול אזי, זאת זרימה פוטנציאלית.

<u>קווי מסלול:</u>

עבור הרכיב ה-*x*-י:

$$v_x=Ax=\frac{dx}{dt}\longrightarrow\int_{t_0}^{t}Adt=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}$$

$$A(t-t_0)=\ln(x)-\ln(x_0)\xrightarrow{\ln(x)-\ln(x_0)=\ln(\frac{x}{x_0})}\boxed{x(t)=x_0e^{A(t-t_0)}}$$

עבור הרכיב ה-y-י:

$$v_y = -Ay = \frac{dy}{dt} \longrightarrow -\int_{t_0}^{t} Adt = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y}$$

$$-A(t-t_0) = \ln(y) - \ln(y_0) \xrightarrow{\ln(y)-\ln(y_0)=\ln(\frac{y}{y_0})} \boxed{y(t) = y_0 e^{-A(t-t_0)}}$$

נמצא את הקשר בין הקואורדינטות השונות.

$$\left[\begin{array}{l} \boxed{y(t) = y_0 e^{-A(t-t_0)}} \\ \boxed{x(t) = x_0 e^{A(t-t_0)}} \end{array}\right. \longrightarrow \boxed{x(t) \bullet y(t) = x_0 e^{A(t-t_0)} y_0 e^{-A(t-t_0)} = x_0 y_0}$$

אלו קווי המסלול!

<u>קווי זרימה:</u>

$$\vec{V} \times \vec{dr} = 0 \longrightarrow \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \longrightarrow \frac{dx}{Ax} = \frac{dy}{-Ay} \longrightarrow \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = -\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y} \longrightarrow \ln(\frac{x}{x_0}) = -\ln(\frac{y}{y_0}) \xrightarrow{\exp} e^{\ln(\frac{x}{x_0})} = e^{-\ln(\frac{y}{y_0})}$$

$$\longrightarrow e^{\ln(\frac{x}{x_0})} = e^{\ln(\frac{y_0}{y})} \longrightarrow \frac{x}{x_0} = \frac{y_0}{y} \longrightarrow \boxed{xy = x_0 y_0}$$

ניתן לראות כי קווי המסלול וקווי הזרימה זהים! $\boxed{xy = x_0 y_0}$ על כן, זוהי **זרימה סטציונרית!**

עצם העובדה לגבי הזרימה הסטציונרית נוכל להשתמש במשוואת ברנולי!!

זרימה סטציונרית מצביעה לנו על כך שהגדלים: לחץ, מהירות, צפיפות הנוזל – לא תלויים בזמן (*Steady Flow*).

5. חלקיק, לא אינפיניטסימלי, בתוך נוזל עם עירבוליות Ω.

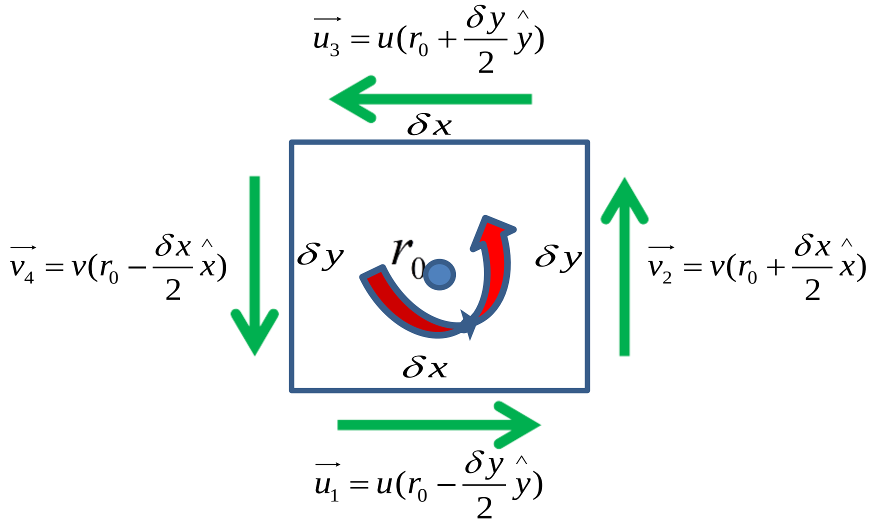
נגדיר את וקטור המהירות ורכיביו: $\vec{V} = (u, v, w)$. נקבע כי לחלקיק אין מהירות בכיוון z ואין תלות ב-z. על כן, w=0 וכל נגזרת לפי z תתאפס.

נשתמש בהגדרת העירבוליות:

$$\omega=\vec{\nabla}\times\vec{V}=\left|\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ u & v & w\end{pmatrix}\right|=\hat{x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\hat{y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\hat{z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\xrightarrow[\frac{\partial}{\partial z}=0]{w=0}\hat{z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

נדמיין כי החלקיק בצורת מלבן קטן.

נביט עתה בציור הבא:



ניתן להסיק מהציור את גודל החלקיק, ואת המהירות שמרגישה כל צלע של החלקיק עקב עירבוליות הנוזל.

בתנועה מסוג זה מגדירים את המהירות הזוויתית כך: $\Omega=\frac{\vec{V}}{R}$.

נחשב את המהירות הממוצעת של החלקיק:

$$\vec{V}=\frac{1}{4}(\vec{u_1}+\vec{v_2}+\vec{u_3}+\vec{v_4})$$

נציב את המהירות שכתובות בציור, ונקבל:

$$\vec{V}=\frac{1}{4}\left[u(r_0-\frac{\delta y}{2})-u(r_0+\frac{\delta y}{2})+v(r_0+\frac{\delta x}{2})-u(r_0-\frac{\delta x}{2})\right]$$

$$\vec{\Omega}=\frac{\vec{V}}{R}\xrightarrow{R=\frac{\delta x}{2}=\frac{\delta y}{2}}\Omega_z=\frac{1}{2}\left[\frac{u(r_0-\frac{\delta y}{2})-u(r_0+\frac{\delta y}{2})}{\delta y}+\frac{v(r_0+\frac{\delta x}{2})-v(r_0-\frac{\delta x}{2})}{\delta x}\right]$$

$$\Omega_z=\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]=\frac{1}{2}\omega_z\longrightarrow\boxed{\Omega_z=\frac{1}{2}\omega_z}$$

אם נרחיב את השאלה ל-3D עם מהירויות בכל הכיוונים, נוכל להראות כי

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}}.$$

פרק 4: מסה אפקטיבית

4.1. מסה אפקטיבית

תנועה של גוף בנוזל, בעל צפיפות גדולה יותר מצפיפות האוויר, יוצרת תנועה מדומה באוויר של גוף עם מסה גדולה יותר ממסתה המקורית. זוהי המסה האפקטיבית m_{eff}. קרי, המסה האפקטיבית היא המסה המקורית של הגוף בתוספת מסוימת.

לכל גוף יש "מסה נוספת" המוגדרת לפי צורת הגוף. המסה האפקטיבית של **כדור**, לפי הגדרתה, היא מסת הכדור בתוספת **חצי** מכפלת צפיפות הנוזל בנפח הכדור:

$$\boxed{m_{eff} = m_{ball} + m_{added} \xrightarrow[m_{ball}=\rho_b V_b]{m_{added}=\frac{1}{2}\rho_\ell V_b} = \rho_b V_b + \frac{1}{2}\rho_\ell V_b}$$

כאשר מדברים על גליל המסה הנוספת היא:

$$m_{added} = \rho_\ell V_{cylinder} = \rho_\ell \pi r^2 h$$

$$m_{eff} = m_{cylinder} + m_{added} = \rho_{cylinder}\pi r^2 h + \rho_\ell \pi r^2 h = \pi r^2 h(\rho_\ell + \rho_{cylinder})$$

במקרה של ספינה, המסה הנוספת היא כ-1/3 ממכפלת צפיפות הנוזל בנפח הספינה.

4.2. דוגמאות

1. כדור במסה m עם צפיפות ρ_b, נע בכיוון אנכי בנוזל עם צפיפות אחידה ρ_ℓ כתוצאה משדה הכבידה. אילו כוחות פועלים על הגוף ולאיזה כיוון כל כח מכוון? מהי תאוצתו של הכדור? בדקו מקרי קיצון ונתחו כל מקרה.

2. נתונה מטוטלת באורך L שבקצה כדור עם מסה m בעל צפיפות ρ_b ורדיוס a.
המטוטלת נמצאת בתוך נוזל בלתי דחיס עם צפיפות אחידה ρ_l.
יש למצוא את התדירות וזמן המחזור של האוסצילציות בתוך הנוזל.
מספר הנחות: - זרימה פוטנציאלית - זוויות קטנות.
יש להבחין ביחס בין צפיפות הכדור וצפיפות הנוזל.
אילו הנוזל היה צמיג, למה יש לצפות?

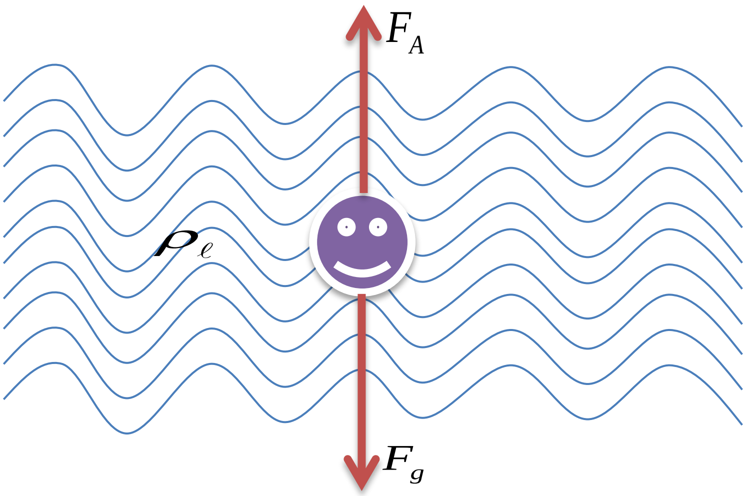
3. מערכת מורכבת מגוף בעל מסה m המחוברת לקפיץ k ולמוט באורך L.
מכניסים את המערכת לתוך מיכל עם נוזל.
א. איך תשתנה תדירות האוסצילציות כאשר הנוזל אליו הוכנסה המערכת הוא אידיאלי?
ב. אילו הנוזל היה צמיג, מה היינו מצפים שיקרה?

4. שני חברים יוצאים מכפר לרגלי הרי האלפים. לשניהם שעון זהה לחלוטין והשעונים מסונכרנים היטב! אחד עולה לפסגות הגבוהות והשני יורד לטייל בעמקים. החברים קבעו להיפגש בכפר כאשר השעון יציג את השעה 18:00.
בהנחה ששניהם מדייקים ועומדים במזנים בצורה מושלמת!
מי משני החברים יגיע ראשון לכפר?

4.3. פתרונות לדוגמאות

1. הכוחות הפועלים על כדור השוקע בנוזל בשדה כבידה כלשהו הם: כח הכובד (F_g) וכח ארכימדס (F_A). התנועה של הכדור בנוזל, בעל צפיפות יותר מצפיפות האוויר, יוצרת תנועה מדומה באוויר לגוף עם מסה גדולה יותר. זוהי המסה האפקטיבית m_{eff}.
נכתוב את הנתונים הידועים ואת הגודל של כל כח.

$$m = \rho_b V_b$$
$$F_A = \rho_\ell V_b g$$
$$F_g = mg = \rho_b V_b g$$
$$m_{eff} = \rho_b V_b + \frac{1}{2}\rho_\ell V_b$$



נכתוב את משוואת הכוחות של ניוטון :

$$m_{eff}\vec{a}=\overrightarrow{F_g}+\overrightarrow{F_A}=\rho_\ell V_b g-\rho_b V_b g\longrightarrow \vec{a}=\frac{\rho_\ell V_b g-\rho_b V_b g}{\rho_b V_b+\frac{1}{2}\rho_\ell V_b}$$

$$\boxed{\vec{a}=\frac{(\rho_\ell-\rho_b)g}{\rho_b+\frac{1}{2}\rho_\ell}}$$

ננתח את התשובה על ידי מקרי קיצון, כאשר נשנה את היחס $\frac{\rho_b}{\rho_\ell}$.

א. $\frac{\rho_b}{\rho_\ell}=1 \longrightarrow a=0$ תנועה במהירות קבועה (המהירות ההתחלתית שניתנה לגוף).

ב. $\frac{\rho_b}{\rho_\ell}>1 \longrightarrow a<0$ הגוף ירד בתאוצה הקטנה מ-g.

ג. $\frac{\rho_b}{\rho_\ell}\gg 1 \longrightarrow a=-g$ נפילה חופשית.

ד. $\frac{\rho_b}{\rho_\ell}<1 \longrightarrow a>0$ הגוף יעלה בתאוצה.

ה. $\frac{\rho_b}{\rho_\ell}\ll 1 \longrightarrow a=2g$ הגוף יעלה בתאוצה כפולה מתאוצת הכובד.

2. משוואת התנועה במערכת של מטוטלת היא : $ml\ddot{\theta}=-mg\theta$

נוכל ממשוואה דיפרנציאלית זאת למצוא את תדירות האוסצילציות של הכדור בתנועה המחזורית שלו על המטוטלת.

$$ml\ddot{\theta}=-mg\theta\longrightarrow\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta\longrightarrow\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

כאשר מכניסים את המערכת לתוך נוזל פועל על הגוף כוחות נוספים – כח ארכימדס ו"כח" שנובע מעצם הכנסת המערכת לתוך נוזל (שינוי המסה למסה אפקטיבית).

נכתוב את משוואת התנועה החדשה.

$$ml\ddot{\theta}=-mg\theta+\rho_\ell V_b g\theta-m_{added}l\ddot{\theta}$$

היות ואנחנו מכירים את צורת המשוואה ואת צורת הפתרון, לא נציג את דרך הפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית, אלא נכתוב רק את המסקנות של הפתרון.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{(m-\rho_\ell V_b)}{(m+m_{added})}\theta \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{(m-\rho_\ell V_b)}{(m+m_{added})}} = \omega_0\sqrt{\frac{(\rho_b V_b - \rho_\ell V_b)}{(\rho_b V_b + \frac{1}{2}\rho_\ell V_b)}}$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta + \rho_\ell V_b g\theta - m_{added} l\ddot{\theta}$$
$$l(m+m_{added})\ddot{\theta} = -(m-\rho_\ell V_b)g\theta$$
$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{g}{l}\right)\frac{(m-\rho_\ell V_b)}{(m+m_{added})}\theta$$

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{\frac{(\rho_b - \rho_\ell)}{(\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell)}}}$$

אם כן, מצאנו את תדירות האוסצילציות של הכדור לאחר שהכנסנו את מערכת המטוטלת לתוך נוזל.

ניתן לראות כי התדירות שמצאנו קטנה תמיד מתדירות הגוף באוויר.

$$\left\{\begin{array}{l} \omega = \omega_0\sqrt{\dfrac{(\rho_b - \rho_\ell)}{(\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell)}} \\ \rho_b - \rho_\ell < \rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell \longrightarrow \dfrac{(\rho_b - \rho_\ell)}{(\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell)} < 1 \end{array}\right. \longrightarrow \boxed{\omega < \omega_0}$$

הדבר מאוד הגיוני! שכן, כאשר המערכת נמצאת בתוך הנוזל, הגוף ינוע לאט יותר, זמן המחזור של הגוף יהיה גדול יותר ועל כן תדירות התנועה תהיה קטנה יותר.

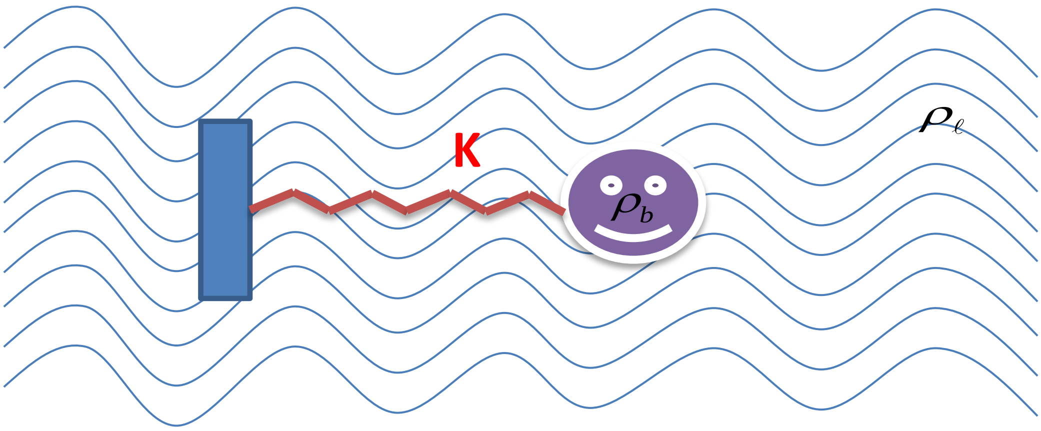
ניתן לפתור את השאלה הזאת גם על ידי פירוק משוואת ניוטון לרכיבי x,z ובהנחת תנועה בסטיות (זוויות) קטנות סביב נקודת שיווי משקל, נוכל להניח זוויות קטנות כך ש- $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$.

3. מכניסים כדור בעל מסה m (צפיפות ρ_b), הקשור לקפיץ עם קבוע k, לתוך נוזל.
התנועה של הכדור בתוך נוזל, בעל צפיפות גדולה מצפיפות האוויר, יוצרת תנועה מדומה באוויר עם מסה גדולה יותר – מסה אפקטיבית.

א. תדירות התנועה של הכדור באוויר היא $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

המסה האפקטיבית של כדור, לפיה הגדרתה, היא מסת הגוף בתוספת חצי מכפלת צפיפות הנוזל בנפח הגוף:

$$m_{eff} = m_{ball} + m_{added} \xrightarrow[m_{ball}=\rho_b V_b]{m_{added}=\frac{1}{2}\rho_\ell V_b} = \rho_b V_b + \frac{1}{2}\rho_\ell V_b$$



ממשוואת הכוחות של ניוטון:

$$\sum \vec{F} = m_{eff}\,\vec{a} \longrightarrow m\ddot{x} = -k\vartriangle x - m_{added}\ddot{x} \longrightarrow -k\vartriangle x = m_{eff}\ddot{x}$$

את המשוואה הדיפרנציאלית הזאת אפשר לפתור בקלות.
היות וידוע לנו הפתרון, נוכל לכתוב מיד את תדירות האוסצילציות של הגוף.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{k}{\rho_b V_b + \frac{1}{2}\rho_\ell V_b}} = \sqrt{\frac{k}{V_b(\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell)}} = \sqrt{\frac{k}{V_b(\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell)}}$$

מהביטוי האחרון נחלץ את תדירות הגוף אילו היה באוויר ($\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_b k}{\rho_b V_b(\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell)}} = \sqrt{\frac{k\rho_b}{m_b(\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell)}} = \sqrt{\frac{k}{m_b}} \bullet \sqrt{\frac{\rho_b}{\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell}}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{\rho_b}{\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell}}}$$

ניתן לראות כי, אם צפיפות הגוף גדולה בהרבה מצפיפות הנוזל $\rho_\ell \ll \rho_b$ תדירות הגוף תהיה כמו תדירותו באוויר.

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{\rho_b}{\rho_b + \frac{1}{2}\rho_\ell}} \xrightarrow{\rho_\ell \ll \rho_b} \omega = \omega_0$$

ב. אילו היה הנוזל צמיג, היה מתווסף למשוואה הדיפרנציאלית עוד איבר. אופי איבר זה תלוי כמובן במאפיינים של נוזל צמיג. כידוע מחיי היומיום, לנוזל צמיג יש תכונה שמגבילה את התנועה של הגוף בתוכו. על כן למשוואה הדיפרנציאלית יתווסף איבר מדעיך שיקטין את האמפליטודה עם הזמן והוא יהווה את הגורם המרכזי לתנועת הגוף. לסיכום, תנועת הגוף תיפסק מהר מאוד!

4. פתרון בקרוב...

פרק 5: משוואת אוילר Euler

5.1. משוואת אוילר

נפתח את משוואת אוילר בכך שנכתוב את משפט ניוטון האינטגרלי. הכוחות הפועלים הם כח הכבידה (G) וכח הפועל על הגוף כתוצאה מהלחץ בו הוא נתון(P).

נכתוב את החוק השני של ניוטון בכתיב אינטגרלי.

$$\int_\tau \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau = \sum_i F_i$$

נכתוב בפירוש את הכוחות הפועלים על גוף הנמצא בנוזל בנוכחות שדה כבידה.

$$\begin{bmatrix} F_G = \int_\tau \rho g d^3 r \xrightarrow{d^3r = d\tau} F_G = \int_\tau \rho g d\tau \\ F_P = -\oint_S P d\vec{S} \xrightarrow{\text{Gradient Lema}} F_P = -\int_\tau (\vec{\nabla} P) d\tau \end{bmatrix}$$

נציב את הכוחות הנ"ל בחוק השני של ניוטון.

$$\int_\tau \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau = \int_\tau \rho g d\tau - \int_\tau (\vec{\nabla} P) d\tau$$

נפתח את הביטוי לפי הגדרת הנגזרת הלגראנז'יאנית.

$$\int_\tau \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau = \int_\tau (\rho g - \vec{\nabla} P) d\tau \xrightarrow{\text{Lagrange's Derivative}} \int_\tau \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} \right] d\tau = \int_\tau \left[\rho g - \vec{\nabla} P \right] d\tau$$

נשווה את האינטגרנדים הנמצאים תחת האינטגרל הנפתח.

$$\boxed{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g} + \begin{pmatrix} other \\ accelerations \end{pmatrix}}$$

קיבלנו את **משוואת אוילר** שפותחה במאה ה-18 על ידי המתמטיקאי והפיסיקאי השווייצרי לאונרד אוילר. משוואה זאת היא הבסיס להבנת מכניקת הנוזלים.

משוואת אוילר היא משוואה וקטורית (כפי שניתן לראות). אפשר לומר שאלו **שלוש** משוואות דיפרנציאליות חלקיות. המשוואה מתארת את ההתנהגות הפיסיקלית של הזורם. הגודל הפיסיקלי שמופיע במשוואה זו הוא המהירות. פתרון המשוואה ייתן את וקטור המהירות התלוי בזמן. משוואה זו מתוארת על ידי שימור המסה, שימור האנרגיה ושימור התנע. כל זה עבור זרימה של זורם לא צמיג! משוואת אויילר היא משוואה דיפרנציאלית, לא לינארית. מצד שמאל ניתן להבחין בתאוצה הפנימית ומצד ימין של המשוואה ישנן תאוצות (כוחות) חיצוניות.

למשוואת אוילר ישנם שימושים רבים גם בתחום האווירודינמיקה! באמצעותה ניתן לבחון מודלים ממוזערים של כלי תחבורה לצורך הבנת התנהגותם בגודל אמיתי (מספר ריינולד – Reynolds number).

5.2. דוגמאות

1. **בעיית הדלי המסתובב**

נוזל נמצא בדלי מסתובב. הנוזל בלתי דחיס בשדה גרביטציה. נתונה המהירות הזוויתית Ω והיא קבועה.

א. יש למצוא את קווי המסלול ואת קווי הזרימה של הנוזל.

ב. מה המסקנות של סעיף א'?

ג. מהי צורת הנוזל הנוצרת כתוצאה מסיבוב הדלי?

2. **בעיית הדלי המסתובב (כאשר מופעל כח חיצוני)**

על הנוזל בדלי, מופעל כח F.

$$\vec{F}(x,y) = (Ax+By)\,\hat{i} + (Cx+Dy)\,\hat{j}$$

כתוצאה מכח זה הנוזל מתחיל להסתובב במהירות זוויתית כלשהי.

א. מהי המהירות הזוויתית ומהי העירבוליות?

ב. מהי פונקציית הלחץ במרחב?

3. נוזל אידיאלי אינסופי נמצא במנוחה. לפתע נוזל שנמצא בתוך כדור עם רדיוס a נעלם ונוצר חלל ריק. כתוצאה מכך, נוצרת זרימה של הנוזל במטרה למלא את החלל הריק. קבלו את המשוואות שמתארות את הזרימה ואת רדיוס החלל כפונקציה של הזמן.

מצאו את הלחץ על מעטפת הכדור. ניתן להניח זרימה פוטנציאלית.

<u>הדרכה אפשרית:</u>

א) יש להשתמש במשוואת לפלס עבור הפוטנציאל או משוואת הרציפות עבור המהירות.

ב) נחשו פתרון של הפרדת משתנים.

ג) השתמשו במשוואת ברנולי $\frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \mathrm{const}$ כדי למצוא את הקשר בין הלחץ והמהירות. ניתן למצוא את הקבוע על ידי הנתון של הלחץ באינסוף.

ד) השתמשו בתנאי שהלחץ מתאפס בתוך החלל הריק כדי למצוא מד״ר עבור הרדיוס כפונקציה של הזמן. (שאלה 3 מבחן 2010 מועד א׳)

4. ממשוואת הרציפות וממשוואת אוילר יש לגזור את המשוואה שמתארת את התפתחות העירבוליות.

משוואת אוילר
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}$$

משוואת הרציפות
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{v}\right) = 0$$

משוואת העירבוליות
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \bullet \vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

הגדרת העירבוליות
$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

5. גליל ברדיוס R הנמצא בנוזל אידיאלי ובלתי דחיס, נע במהירות u המאונכת לציר הסימטריה של הגליל (ציר z).

א. יש למצוא את פונקציית הזרימה הפוטנציאלית סביב הגליל.

ב. יש לצייר את התנועה של הנוזל צמוד לגליל ורחוק ממנו.

5.3. פתרונות לדוגמאות

1. **בעיית הדלי המסתובב**

א. מהמהירות הזוויתית, נמצא את V.

$$\vec{V}=\vec{\Omega}\times\vec{r}=\left\|\begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & \Omega\\ x & y & z\end{pmatrix}\right\|=-\Omega y\,\hat{i}+-\Omega x\,\hat{j}=\{-\Omega y,\Omega x,0\}$$

נמצא כעת את קווי המסלול וקווי הזרימה.

נתחיל עם קווי הזרימה.

$$\frac{dx}{V_x}=\frac{dy}{V_y}\longrightarrow\frac{dx}{-\Omega y}=\frac{dy}{\Omega x}\longrightarrow\Omega xdx=-\Omega ydy\xrightarrow{\int}\int_{x_0}^{x(t)}\Omega xdx=-\int_{y_0}^{y(t)}\Omega ydy$$

$$\frac{\Omega}{2}(x^2(t)-x_0{}^2)=-\frac{\Omega}{2}(y^2(t)-y_0{}^2)\xrightarrow{x(t)=x}x^2+y^2=x_0{}^2+y_0{}^2\xrightarrow{x_0{}^2+y_0{}^2=R^2}\boxed{x^2+y^2=R^2}$$

קיבלנו קווי זרימה של מעגל.

עתה, נמצא את קווי המסלול.

$$\begin{bmatrix}V_x=-\Omega y=\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}\longrightarrow\ddot{x}=-\Omega\dot{y}\\ V_y=\Omega x=\dot{y}=\dfrac{dy}{dt}\end{bmatrix}\longrightarrow\ddot{x}=-\Omega^2x\ ,\ \ddot{y}=-\Omega^2y$$

$$\begin{bmatrix}x(t)=A\cos(\omega t)\\ y(t)=A\sin(\omega t)\end{bmatrix}\longrightarrow\boxed{x^2+y^2=A^2}$$

קיבלנו קווי מסלול מעגליים.

אם כך, קווי הזרימה זהים לקווי המסלול.

מה זה אומר לנו? זוהי **זרימה פוטנציאלית**!!

ב. מה הן התכונות של זרימה פוטנציאלית? איך זה משפיע על הבעיה? בזרימה פוטנציאלית ניתן לצלם את הזרימה והתמונה לא תשתנה לאחר זמן. מה שאומר לנו שבזרימה פוטנציאלית, המהירות, הלחץ, והצפיפות לא תלויים בזמן!

היות וזאת דינמיקה של נוזל אידיאלי בלתי דחיס, נוכל להשתמש ב**משוואת אוילר**.

ג. ממשוואת אויילר, נמצא את צורת הנוזל על ידי מספר טכניקות יפות.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}=-\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}+\vec{g}\xrightarrow{potential\ flow}\cancel{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}+(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}=-\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}-g$$

נבצע אינטגרציה מרחבית (dr) על שני האגפים.

$$\xrightarrow{\int \vec{dr}}\int\left(V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}\right)V_x dx+\int\left(V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}\right)V_y dy=-\int\frac{1}{\rho}\sum_{i=x,y,z}\left(\frac{\partial p}{\partial r_i}\hat{r_i}\right)dr_i-\int g dz$$

$$-\int\Omega^2 x dx-\int\Omega^2 y dy=\frac{1}{\rho}(P-P_0)-gz$$

$$\frac{\Omega^2}{2}\left(x^2+y^2+c\right)=\frac{1}{\rho}(P-P_0)-gz$$

$$\boxed{z=\frac{\Omega^2}{2g}\left(x^2+y^2+c\right)-\frac{1}{g\rho}(P-P_0)\xrightarrow{x^2+y^2=r^2}z\sim r^2\ (Parboloid)}$$

קבלנו צורה של פרבולואיד – כמו שקבלנו באחת הדוגמאות קודם לכן.

2. **בעיית הדלי המסתובב (כאשר מופעל כח חיצוני)**

א. נמצא את המהירות V(t) לפי הקשר בינה לבין המהירות הזוויתית.

$$\vec{V}=\vec{\Omega}(t)\times\vec{r}(t)=\left\|\begin{pmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\0&0&\Omega\\x&y&z\end{pmatrix}\right\|=-\Omega y\,\hat{i}-\Omega x\,\hat{j}$$

ה-curl של המהירות נותן לנו את עירבוליות התנועה.

$$\vec{\omega}=\vec{\nabla}\times\vec{V}=\left\|\begin{pmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\-\Omega y&\Omega x&0\end{pmatrix}\right\|=\hat{k}\left(\frac{\partial(\Omega x)}{\partial x}-\frac{\partial(-\Omega y)}{\partial y}\right)=2\Omega(t)\,\hat{k}$$

נכתוב את משוואת אוילר ונפעיל curl על שני האגפים (זוהי שיטה טובה מאוד במשוואות וקטורית מסוג זה).

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m} \xrightarrow{\vec{\nabla}\times} \vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}\right) = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}\right)$$

$$\frac{\partial(\vec{\nabla}\times\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\left[(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}\right] = \frac{\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} P\right)}{-\rho} + \vec{\nabla}\times\vec{g} + \frac{\vec{\nabla}\times\vec{F}}{m}$$

נעזר בחישובים הבאים:

$$\begin{pmatrix} \vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{\omega} \quad , \quad \vec{\nabla}\times(grad\phi) = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{g} = \left|\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -g \end{pmatrix}\right| = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left|\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ax+By & Cx+Dy & 0 \end{pmatrix}\right| = \hat{k}(C-B) \end{pmatrix}$$

נציב את התוצאות הסופית בחזרה במשוואת אוילר, ונקבל:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\left[(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}\right] = 0 + 0 + \frac{\hat{k}(C-B)}{m}$$

לצורך המשך הפתרון, נאלץ להיעזר במספר זהויות וקטוריות.

$$\begin{bmatrix} \vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla}\vec{A}) - (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\vec{B}) \\ \vec{\nabla}\times\left[\left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right] = \vec{\nabla}\times\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)\times\vec{V}\right] + \cancel{\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\frac{\vec{V}^2}{2}\right)} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)\times\vec{V}\right]=\vec{\nabla}\times\left[\left(\vec{\omega}\right)\times\vec{V}\right]=2\vec{\nabla}\times\left[\left(\vec{\Omega}\right)\times\vec{V}\right]$$
$$\vec{\nabla}\times\left[\left(\vec{\Omega}\right)\times\vec{V}\right]=(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{\Omega}-\vec{V}(\vec{\nabla}\vec{\Omega})-(\vec{\Omega}\vec{\nabla})\vec{V}+\vec{\Omega}(\vec{\nabla}\vec{V})$$
$$(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{\Omega}=\left(V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+V_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{\Omega}=0$$
$$\vec{\nabla}\vec{\Omega}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)=0$$
$$(\vec{\Omega}\vec{\nabla})\vec{V}=\left[\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)\vec{\nabla}\right]\vec{V}=0$$
$$\vec{\nabla}\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$$

גילינו כי האיבר $\vec{\nabla}\times\left[(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}\right]$ שווה לאפס!

קבלנו אם כן, משוואה דיפרנציאלית פשוטה מאוד, ממנה נמצא את המהירות הזוויתית ואת העירבוליות.

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+0=0+0+\frac{\hat{k}(C-B)}{m}$$
$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}=\frac{\hat{k}(C-B)}{m}\xrightarrow{\int dt}\boxed{\vec{\omega}=\frac{\hat{k}(C-B)}{m}t}\longrightarrow\boxed{\vec{\Omega}=\frac{\hat{k}(C-B)}{2m}t}$$

ב. כעת, נציב את המהירות ואת גודל העירבוליות במשוואת אויילר ונפתור אותה.

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}=-\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}+\vec{g}+\frac{\vec{F}}{m}$$
$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=\frac{\partial V_x}{\partial t}\hat{x}+\frac{\partial V_y}{\partial t}\hat{y}=-y\frac{\partial\Omega}{\partial t}\hat{x}+x\frac{\partial\Omega}{\partial t}\hat{y}=-\Omega\frac{\partial y}{\partial t}\hat{x}+\Omega\frac{\partial x}{\partial t}\hat{y}=-\Omega V_y\hat{x}+\Omega V_x\hat{y}$$
$$(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}=\left(V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+\cancel{V_z\frac{\partial}{\partial z}}\right)\left(V_x\hat{x}+V_y\hat{y}+\cancel{V_z\hat{z}}\right)=-\Omega y\frac{\partial V_y}{\partial x}\hat{y}+\Omega x\frac{\partial V_x}{\partial y}\hat{x}$$
$$(\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V}=-\Omega^2 y\hat{y}--\Omega^2 x\hat{x}$$
$$\vec{\nabla}P=\frac{\partial P}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial P}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial P}{\partial z}\hat{z}$$

נפרק לכיוונים:

$$\hat{x}:\ -y\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\Omega^2 x=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{Ax+By}{m}$$

$$\hat{y}:\ x\frac{\partial\Omega}{\partial t}-\Omega^2 y=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{Cx+Dy}{m}$$

נחלץ את החלק של הלחץ ונכתוב משוואה דיפרנציאלית עבור הלחץ בכל כיוון.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\rho\frac{Ax+By}{m}+\rho\Omega^2 x+\rho y\frac{\partial\Omega}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x}=\rho\frac{Ax+By}{m}+\rho\Omega^2 x+\rho y\frac{C-B}{2m}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\rho\frac{Cx+Dy}{m}+\rho\Omega^2 y-\rho x\frac{\partial\Omega}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\rho\frac{Cx+Dy}{m}+\rho\Omega^2 y-\rho x\frac{C-B}{2m}}$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית התלויה ב-x וב-y.

נפתור את המשוואה הראשונה (נבצע אינטגרציה לפי x).

תהיה לנו תוספת של איבר התלוי אך ורק במשתנה y.

$$P(x,y)=\rho\left[\frac{1}{m}\left(\frac{Ax^2}{2}+Bxy\right)+\frac{\Omega^2x^2}{2}+y\frac{C-B}{2m}x+const(y)\right]$$

כעת נגזור את הביטוי שמצאנו לפי y ונמצא מהו הקבוע const(y) ונשווה את התוצאה לערך $\frac{\partial P}{\partial y}$ שהוצאנו ממשוואת אוילר.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\rho\left[\frac{1}{m}Bx+\frac{C-B}{2m}x+\frac{\partial(const(y))}{\partial y}\right]=\rho\frac{Cx+Dy}{m}+\rho\Omega^2 y-\rho x\frac{C-B}{2m}$$

$$\frac{\partial(const(y))}{\partial y}=-\frac{1}{m}Bx-\frac{C-B}{2m}x+\frac{Cx+Dy}{m}+\Omega^2 y-x\frac{C-B}{2m}$$

$$\frac{\partial(const(y))}{\partial y}=x\left(-\frac{1}{m}B-\frac{C-B}{2m}+\frac{C}{m}-\frac{C-B}{2m}\right)+y\left(\frac{D}{m}+\Omega^2\right)=y\left(\frac{D}{m}+\Omega^2\right)$$

$$const(y)=\frac{y^2}{2}\left(\frac{D}{m}+\Omega^2\right)+const$$

לבסוף, נציב בחזרה בפונקציה P(x,y).

$$P(x,y)=\rho\left[\frac{1}{m}\left(\frac{Ax^2}{2}+Bxy\right)+\frac{\Omega^2x^2}{2}+y\frac{C-B}{2m}x+const(y)\right]$$

$$P(x,y)=\rho\left[\frac{1}{m}\left(\frac{Ax^2}{2}+Bxy\right)+\frac{\Omega^2x^2}{2}+y\frac{C-B}{2m}x+\frac{y^2}{2}\left(\frac{D}{m}+\Omega^2\right)\right]+const$$

$$\boxed{P(x,y)=\frac{\rho}{2m}\left[xy(B+C)+\left(Ax^2+Dy^2\right)+m\Omega^2\left(x^2+y^2\right)\right]+const}$$

זה הביטוי הסופי עבור הלחץ.

3. ברגע שנוצר החור הכדורי, מים יתחילו למלא את החלל הריק.

נתחיל בניתוח הבעיה על ידי קביעת תנאי התחלה ותנאי שפה.

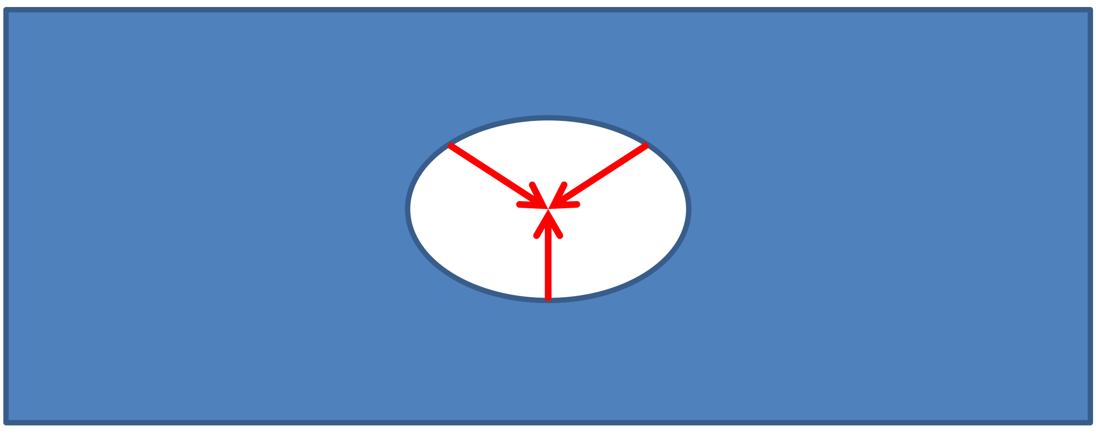
בפתרון הבעיה נתייחס לנוזל ולא אל החור. המשוואות והתנאים בשאלה יופנו אל הנוזל.

רדיוס הכדור הוא a. ניתן להגדיר תנאי התחלה: $R(t=0)=a$

מהירות התחלתית של הנוזל (ברדיוס התחלתי a, כלפי פנים הכדור):

$V(r=a)=0$

הלחץ ב"אינסוף" הוא קבוע: $P(r\to\infty)=P_0$



תחת ההנחה כי הזרימה היא זרימה פוטנציאלית נוכל לומר שהדיברגנץ של המהירות הוא אפס: $div(\vec{V})=0$.

היות ויש לנו סימטריה כדורית בבעיה, נותר לנו רק החלק הרדיאלי של המהירות:

$$div(\vec{V})=0$$

$$\vec{V}=V_r\hat{r}+V_\theta\hat{\theta}+V_\varphi\hat{\varphi}\xrightarrow{angular\,symmetry}\vec{V}=V_r(r,t)\hat{r}=V(r)\cdot\tau(t)$$

$$\vec{\nabla}\vec{V}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2V_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(V_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(V_\varphi)}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2V_r)}{\partial r}=0\longrightarrow\frac{\partial(r^2V_r)}{\partial r}=0\longrightarrow r^2V_r=\tau(t)\longrightarrow\boxed{V_r=\frac{\tau(t)}{r^2}}$$

קבלנו אם כן, קשר בין המהירות הרדיאלית (התלויה ב-r וב-t) לבין החלק התלוי בזמן.

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{1}{r^2}\hat{r}+\left[\left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right]=\frac{-\vec{\nabla}P}{\rho}+\left(no\,gravity!\right)$$

אז למה בעצם המים ימלאו את הריק? זה אחד המאפיינים החשובים ביותר בנושא ההידרודינמיקה. הפרש הלחצים, הוא הגורם לסיבה שהמים ימלאו את החלל הריק. הלחץ מחוץ לבועה גדול מהלחץ בתוכה. בנוסף, כמו למהירות, גם ללחץ רכיב רדיאלי בלבד! (מטעמי סימטריה).

$$P=P(r)$$

$$\vec{\nabla}P=\frac{\partial P}{\partial r}\hat{r}+\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}\hat{\theta}}+\cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}\hat{\varphi}}=\frac{\partial P}{\partial r}\hat{r}$$

נציב במשוואת אויילר שכתבנו לעיל את החלק של הלחץ.

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{1}{r^2}\hat{r}+\left[V_r\frac{\partial}{\partial r}\right]\cdot\vec{V}=-\frac{\partial P}{\partial r}\frac{1}{\rho}\hat{r}$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{1}{r^2}\hat{r}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}\hat{r}=-\frac{\partial P}{\partial r}\frac{1}{\rho}\hat{r}$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{1}{r^2}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}=-\frac{\partial P}{\partial r}\frac{1}{\rho}\xrightarrow{\int_{R(t)}^{\infty}dr}\frac{\partial\tau}{\partial t}\int_{R(t)}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr+\int_{R(t)}^{\infty}V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}dr=-\frac{1}{\rho}\int_{R(t)}^{\infty}\frac{\partial P}{\partial r}dr$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_{R(t)}^{\infty}+\frac{V_r^{\,2}}{2}\Big|_{V_r(r=R(t))}^{V_r(r=\infty)=0}=-\frac{1}{\rho}\left[P_0-P\left(r=R(t)\right)\right]$$
$$\frac{1}{R(t)}\frac{\partial\tau}{\partial t}-\frac{1}{2}V_r^{\,2}\left(r=R(t)\right)=-\frac{1}{\rho}\left[P_0-P\left(r=R(t)\right)\right]$$

מחוקי התנועה של הקינמטיקה ידוע לנו שמהירות הנוזל על שפת הבועה היא השינוי ברדיוסה. קרי, מהירות הנוזל על שפת הבועה, היא הנגזרת של רדיוס הבועה. השינוי ברדיוס החור לפי הזמן זוהי בעצם המהירות שבה מתמלא החור. או בכתיב מתמטי: $\boxed{V_r=\frac{\partial R(t)}{\partial t}}$

$$\frac{1}{R(t)}\frac{\partial\tau}{\partial t}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right)^2=-\frac{1}{\rho}\left[P_0-P\left(r=R(t)\right)\right]$$

כעת ניקח את הביטוי $\frac{\partial\tau}{\partial t}$ ונפתח אותו לפי הקשר $V_r=\frac{\tau(t)}{r^2}$ שמצאנו בתחילת התרגיל:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(r^2V_r)=\frac{\partial(r^2)}{\partial t}V_r+\frac{\partial V_r}{\partial t}r^2=2r\frac{\partial r}{\partial t}V_r+\frac{\partial V_r}{\partial t}r^2$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial t}\Big|_{r=R(t)}=2V_rR(t)\frac{\partial R(t)}{\partial t}+\frac{\partial V_r}{\partial t}R^2(t)$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial t}\Big|_{r=R(t)}=2\frac{\partial R(t)}{\partial t}R(t)\frac{\partial R(t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right)R^2(t)$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial t}\Big|_{r=R(t)}=2R(t)\left(\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2R(t)}{\partial t}R^2(t)$$

$$\frac{1}{R(t)}\left(2R(t)\left(\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2 R(t)}{\partial t}R^2(t)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right)^2=-\frac{1}{\rho}\left[P_0-P\left(r=R(t)\right)\right]$$

$$2\left(\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2 R(t)}{\partial t}R(t)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right)^2=-\frac{1}{\rho}\left[P_0-P\left(r=R(t)\right)\right]$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\partial R(t)}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2 R(t)}{\partial t}R(t)=-\frac{1}{\rho}\left[P_0-P\left(r=R(t)\right)\right]$$

נעשה טריק בנגזרות:

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\left(V_r^{\,2}\right)}{\partial R}=\frac{2V_r}{2}\frac{\partial\left(V_r\right)}{\partial R}=V_r\frac{\partial\left(V_r\right)}{\partial t}\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial t}}=V_r\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\frac{1}{V_r}=\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}\right]$$

ונקבל:

$$\frac{3}{2}V_r^{\,2}\left(r=R(t)\right)+\frac{R(t)}{2}\frac{\partial\left(V_r^{\,2}\right)}{\partial R}=-\frac{1}{\rho}\left[P_0-P\left(r=R(t)\right)\right]$$

נוכל לקבוע את הלחץ בפנים החלל הריק כאפס.

$$P\left(r=R(t)\right)=0$$

נציב במשוואה האחרונה:

$$\frac{3}{2}V_r^{\,2}\left(r=R(t)\right)+\frac{R(t)}{2}\frac{\partial\left(V_r^{\,2}\right)}{\partial R}=-\frac{1}{\rho}P_0$$

$$\left\{V_r^{\,2}\equiv y\right\}$$

$$\frac{3}{2}y+\frac{R(t)}{2}\frac{\partial y}{\partial R}=-\frac{1}{\rho}P_0\xrightarrow{\times 2}3y+R(t)\frac{\partial y}{\partial R}=-\frac{2}{\rho}P_0$$

קבלנו משוואה דיפרנציאלית רגילה. כדי לפתור את המד"ר, נשים לב כי זוהי **משוואה שוות מימד אי הומוגנית!** משוואת שוות מימד מאופיינת באיברים בעלי אותו מימד. למשל:

$$y \sim x\frac{\partial y}{\partial x} \quad , \quad y^2 \sim x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad , \quad xy \sim x^2\frac{\partial y}{\partial x}$$

פתרון משוואה מסוג זה הוא:

$$y = A_1 R^{\alpha} + A_2$$

נציב את הפתרון במשוואה ונמצא את הקבועים של הפתרון.

$$3\left(A_1R^{\alpha}+A_2\right)+R(t)\frac{\partial\left(A_1R^{\alpha}+A_2\right)}{\partial R}=-\frac{2}{\rho}P_0$$

$$3A_1R^{\alpha}+3A_2+R(t)\alpha A_1R^{\alpha-1}=-\frac{2}{\rho}P_0$$

$$3A_1R^{\alpha}+3A_2+\alpha A_1R^{\alpha}=-\frac{2}{\rho}P_0$$

$$R^{\alpha}(3A_1+\alpha A_1)+3A_2+\frac{2}{\rho}P_0=0$$

כדי שמשוואה זאת תתקיים, נבצע "השוואת מקדמים".

$$\begin{cases}3A_1+\alpha A_1=0\\ 3A_2+\dfrac{2}{\rho}P_0=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\ A_2=-\dfrac{2}{3\rho}P_0\end{cases}\longrightarrow y\left(R(t)\right)=V^2{}_{r=R(t)}=A_1\frac{1}{R^3}-\frac{2}{3\rho}P_0$$

מצאנו אם כן, שני פרמטרים של הפתרון. נותר לנו למצוא עוד פרמטר אחד.
כמו כל בעיה פיסיקלית, המתוארת על ידי משוואה דיפרנציאלית, גם כאן יש לנו תנאי שפה/תנאי התחלה. במקרה שלנו נבדוק מהן הדרישות עבור המהירות (היות ואנחנו מחפשים את פונקציית המהירות). המהירות על שפת הכדור כאשר r=a היא אפס.

$$Boundary\ Condition:\ V(R=a)=0\longrightarrow V^2(R=a)=0$$

$$V^2{}_{R=a}=A_1\frac{1}{a^3}-\frac{2}{3\rho}P_0=0\longrightarrow A_1=\frac{2P_0a^3}{3\rho}$$

$$V^2{}_{r=R(t)}=\frac{2P_0}{3\rho}\frac{a^3}{R^3}-\frac{2}{3\rho}P_0=\frac{2P_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3}-1\right)$$

$$V\left(R(t)\right)=\pm\sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3}-1\right)}$$

כיוון מהירות הנוזל הוא כלפי פנים הכדור, על כן נבחן **במינוס**.

$$\boxed{V\left(R(t)\right)=-\sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3}-1\right)}}$$

כעת, הדרך למציאת הזמן שלוקח לנוזל למלא את החור סלולה.
נבצע אינטגרציה כדי למצוא את הקשר בין רדיוס הכדור לבין הזמן שלוקח לנוזל להגיע לרדיוס זה. ואם נעשה אינטגרל מסוים, כאשר הרדיוס ההתחלתי הוא a והרדיוס הסופי הוא אפס, נמצא את זמן מילוי החור.

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t}=V\left(R(t)\right)=-\sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3}-1\right)}\xrightarrow{\int_0^T dt,\int_a^0 dR}T=-\int_a^0\frac{1}{\sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3}-1\right)}}dR$$

נעשה החלפת משתנים (יש לשים לב כי גם הגבולות משתנים בהתאם!).

$$\left\{\begin{array}{l}R=ra\\ R=0\longrightarrow r=0\\ R=a\longrightarrow r=1\end{array}\right\}$$

$$T=-\int_1^0\frac{a}{\sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}}\sqrt{\frac{1}{r^3}-1}}dr=\sqrt{\frac{3\rho a^2}{2P_0}}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\approx\sqrt{\frac{3\rho a^2}{2P_0}}\frac{1.13}{2.7}$$

$$\boxed{T\approx a\sqrt{\frac{\rho}{P_0}}0.9}$$

<u>T זהו הזמן שלוקח לחור להתמלא בנוזל:</u>

- עבור a גדול יותר (**נפח גדול יותר למלא**) זמן המילוי יהיה גדול יותר.

- P_0 - הלחץ באינסוף. ככל שהלחץ יהיה גדול יותר כך **יפעל על הנוזל כח גדול יותר** ובזכות זאת זמן המילוי יהיה קטן יותר.
- ככל שצפיפות הנוזל ρ גדולה יותר, **תהיה יותר מסה להזיז**, ובכך זמן המילוי יתארך.

4. פתרון בקרוב...

5. נרשום את המשוואה הרביעית – משוואת לפלס – בקואורדינטות גליליות.

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

מאחר שקיימת סימטריה סביב ציר z , הנגזרות החלקיות לפי הקואורדינטה z מתאפסות.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

תחת האילוץ האחרון נקבל כי משוואת לפלס נראית כך :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0$$

אם כן פונקציית הפוטנציאל Φ תלויה בשני המשתנים r ו- θ.

נפריד את הפתרון למכפלה של 2 פונקציות – אחת התלויה בקואורדינטה r והשנייה תלויה בקואורדינטה θ.

$$\Phi = \Phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

נציב את הפתרון במשוואת לפלס ונחלק בפונקציה Φ.

$$\Theta\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\Theta}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = 0 \xrightarrow[:R(r)\Theta(\theta)]{\cdot r^2} r^2\left[\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR}\frac{\partial R}{\partial r}\right] + \frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = 0$$

לאחר סידור המשוואה והפרדת המשתנים, נוכל לראות כי המשוואה מחולקת לשני חלקים: האחד תלוי בקואורדינטה r והשני בקואורדינטה θ.

נדרוש אם כן, כי הביטוי שתלוי ב-θ יהיה קבוע כלשהו.

איך נדע אם הקבוע יהיה חיובי או שלילי?

היות ומדובר בפונקציה של θ, יש מחזוריות ב- Φ. על כן, נבחר קבוע שלילי.

$$\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = -c^2 \qquad\qquad c > 0$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = -c^2\Theta(\theta)$$

מה שיניב לנו פתרון מחזורי עם הזווית.

$$\boxed{\Theta(\theta) = A_1\cos(c\theta) + A_2\sin(c\theta)}$$

אם היינו בוחרים קבוע חיובי, היינו מקבלים תשובות שונות לחלוטין, מה שלא יסתדר עם אופי הבעיה.

$$\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = c^2 \qquad\qquad c > 0$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = c^2\Theta(\theta)$$

$$\Theta(\theta) = A_1e^{c\theta} + A_2e^{-c\theta}$$

הפתרון שקבלנו מורכב משתי פונקציות: אקספוננציאל דועך ואקספוננציאל מתבדר.

ברור לנו כי החלק הזוויתי של הפתרון אמור להיות מחזורי ואין שום סיבה שידעך או יתבדר ככל שהזווית תגדל או תקטן.

לכן נבטל את הפתרון!

$$\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = c^2 \qquad\qquad c > 0$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = c^2\Theta(\theta)$$

$$\Theta(\theta) = A_1e^{c\theta} + A_2e^{-c\theta}$$

נחזור לפתרון המחזורי: כאשר מדובר בזווית אפס, אין מהירות בכיוון θ (המהירות לכיוון θ שווה לאפס). כזכור מהירות הנוזל היא גרדיאנט של הפוטנציאל (היות ומדובר בזרימה פוטנציאלית).

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} \longrightarrow V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_1\cos\left(c\theta\right) + A_2\sin\left(c\theta\right)\right)$$

$$V_\theta = \frac{1}{r}\left(-cA_1\sin\left(c\theta\right) + cA_2\cos\left(c\theta\right)\right)$$

נציב בפונקציית המהירות θ=0 ונקבל:

$$\left[\begin{array}{l} V_\theta\left(\theta=0\right) = 0 \\ V_\theta\left(\theta=0\right) = \frac{1}{r}\left(cA_2\right) \end{array}\right. \longrightarrow \frac{1}{r}\left(cA_2\right) = 0 \longrightarrow \boxed{A_2 = 0}$$

נציב בחזרה בפונקציית הפוטנציאל.

$$\Theta\left(\theta\right) = A_1\cos\left(c\theta\right)$$

נחזור לחלק ה-r-י, ונציב $\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = -c^2$:

$$r^2\left[\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR}\frac{\partial R}{\partial r}\right] - c^2 = 0 \xrightarrow{\cdot rR}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{c^2}{r^2}R = 0$$

זוהי משוואה שוות מימד (כפי שראינו קודם לכן). ופתרונה חיבור של פולינומים

עם שתי חזקות מנוגדות.

$$R(r)=A_3r^{\alpha}+A_4r^{-\alpha}$$

נציב את הפתרון שצוין במשוואה הדיפרנציאלית ומשם נחלץ את α.

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+\alpha r^{\alpha-2}-c^2r^{\alpha-2}=0 \longrightarrow \left(\alpha^2-\alpha+\alpha-c^2\right)r^{\alpha-2}=0$$
$$\left(\alpha^2-c^2\right)r^{\alpha-2}=0 \longrightarrow \alpha^2-c^2=0 \longrightarrow \boxed{\alpha=\pm c\,/\,c=\pm\alpha}$$

מתנאי השפה באינסוף נוכל לפסול את האיבר הראשון בפתרון היות והוא גורם להתבדרות הביטוי.

$$R(r\to\infty)=0 \longrightarrow A_3=0$$

לכן, נוכל לכתוב את הפתרון הזמני עבור הפוטנציאל והמהירות בצורה הבאה:

$$\Phi(r,\theta)=A_5r^{-\alpha}\cos(\alpha\theta)$$

$$\vec{V}=\vec{\nabla}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta}=A_5\left[-\alpha r^{-\alpha-1}\cos(\alpha\theta)\hat{r}-\alpha r^{-\alpha-1}\sin(\alpha\theta)\hat{\theta}\right]$$
$$\vec{V}=-\alpha A_5\left[r^{-\alpha-1}\cos(\alpha\theta)\hat{r}+r^{-\alpha-1}\sin(\alpha\theta)\hat{\theta}\right]$$

בפתרון נמצאים שני פרמטרים שאותם ננסה למצוא עכשיו.

נכתוב את המהירות הרדיאלית בשתי צורות. מבחינה דיפרנציאלית קבלנו נרשום את הרכיב הרדיאלי של המהירות. מבחינת גיאומטרית ניתן לכתוב את המהירות הרדיאלית בצורה:

$$V_r(r=R)=u\cos(\theta)$$

נשווה בין שתי ההצגות ומשם נמצא את הקבועים

$$\begin{bmatrix} V_r(r=R)=-A_5\alpha R^{-\alpha-1}\cos(\alpha\theta) \\ V_r(r=R)=u\cos(\theta) \end{bmatrix} \longrightarrow -A_5\alpha R^{-\alpha-1}\cos(\alpha\theta)=u\cos(\theta)$$

נשווה בין הארגומנט של ה-cos ובין האמפליטודה של המהירות.

$$\boxed{\alpha = 1}\ ,\ A_5 = \frac{-u}{\alpha R^{-\alpha-1}} \xrightarrow{\alpha=1} A_5 = \frac{-u}{R^{-2}} \longrightarrow \boxed{A_5 = -uR^2}$$

נכתוב מחדש את פונקציית הפוטנציאל (נציב את הקבועים שגילינו).

$$\Phi(r,\theta) = \frac{-uR^2\cos(\theta)}{r}$$

נגזור (נפעיל גרדיאנט) את פונקציית הפוטנציאל כדי לקבל את פרופיל המהירות של הנוזל.

כעת, כשאנו מנתחים את הפתרון מבחינה פיסיקלית, שמים ערך מוחלט על ה-cos כדי לקבל ביטוי חיובי.

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{V} = uR^2\left[\frac{1}{r^2}\left|\cos(\theta)\right|\hat{r} + \frac{1}{r^2}\sin(\theta)\hat{\theta}\right]$$

ממשוואת ברנולי (הגירסה הפוטנציאלית) ניתן למצוא את הלחץ ומשם לחשב את הכח שפועל על הנוזל.

היות וזהו נוזל אידיאלי (אין חיכוך), מיותר יהיה לחשב זאת! הכח שירגיש הנוזל הוא אפס!

$$P = P_0 - \rho\frac{v^2}{2} - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$F = -\oint P\,ds = 0 \qquad (r \to r - ut)$$

פרק 6: צמיגות ומשוואת נאוויר-סטוקס Navier-Stokes

6.1. הגדרת הצמיגות

אחת ההגדרות לצמיגות היא מידת ההתנגדות למזיגה או לשינוי צורה (עיבור). הצמיגות מתארת את התנגדותו הפנימית של הנוזל לזרימה וניתן לחשוב עליה כעל חיכוך.

מושג הצמיגות קשור לזרימה של נוזלים. נניח נוזל הזורם במיכל גדול. נדמיין כי הנוזל מחולק לשכבות הנעות במקביל לקרקעית המיכל. השכבה הנעה בסמוך לדופן נדבקת לדופן ומהירותה אפס (כמהירות הדופן). ככל שנתרחק מהדופן מהירות השכבות הולכת וגדלה (השפעת הדופן יורדת).

מה גורם לתופעה זאת?

בתנועתן של השכבות, הן מתחככות זו בזו. השכבה האיטית מפעילה כח מעכב על שכבה מהירה ממנה ואילו השכבה המהירה מפעילה כח מזרז על השכבה האיטית הצמדה לה.

ככל שההשפעה בין השכבות חזקה יותר, נאמר כי הנוזל צמיג יותר.
כאשר אין כלל השפעה בין השכבות בכלל ובין הדפנות המגבילות את הנוזל בפרט, הנוזל כלל לא צמיג - מה שנקרא – נוזל אידיאלי (נוזל לא צמיג, אתו התעסקנו עד עתה).

6.2. דוגמאות לנוזלים צמיגים ותכונותיהם:

הנוזלים הצמיגים המוכרים ביותר הם: זפת, דבש, שמן, מתנול.

בשפת היומיום נוהגים להשתמש במונח **סמיך** (למשל, "הדבש מאוד סמיך") אך אל לכם להתבלבל עם המושג "צפיפות" או "דחיס" – זה לא אותו הדבר!

הצמיגות של נוזלים יורדת עם העלייה בטמפרטורה!

ניסוי מחשבתי

נחשוב לשם דוגמא על תהליך פשוט – מעבר חומר נוזלי מכלי א' לכלי ב'. אם בשלב ראשון, נמזוג **מים** מכלי א' לכלי ב'. התהליך יימשך זמן קצר מאוד (נתעלם מטיפות קטנות שנשארות בכלי א'), היות ומים זהו חומר בעל צמיגות נמוכה ביותר (ניתן על ידי קירוב סביר בהחלט להגדיר מים כנוזל אידיאלי). בשלב שני, נמזוג **דבש** מכלי א' לכלי ב'. התהליך יימשך זמן רב לעומת השלב הראשון. דבש הוא נוזל בעל צמיגות גבוהה.

אם נמתין זמן רב בניסוי המחשבתי לעיל, נתוודה כי גם מעבר הדבש מכלי א' לכלי ב' יתממש.

6.3. ניסוי טיפת הזפת

ניסוי טיפת הזפת הוא ניסוי מדעי לטווח ארוך, המיועד למדוד את קצב הזרימה של פיסת זפת לאורך שנים רבות. מדובר ב-Pitch, סוג זפת שהוא כללי למספר נוזלים צמיגים ביותר, הנראים מוצקים, כאשר הנפוץ ביותר הוא ביטומן. זפת מסוג זה זורמת בטמפרטורות החדר, אם כי באיטיות רבה, ולבסוף יוצרת טיפות.

מערכת הניסוי, המאוד מפורסם, הותקנה בשנת 1927 על ידי פרופסור תומאס פרנל באוניברסיטת קווינסלנד בבריזביין שבאוסטרליה. כוונתו הייתה להדגים לסטודנטים את העובדה כי כמה חומרים הנראים מוצקים הם למעשה נוזלים בעלי צמיגות גבוהה מאוד. פרנל שם דוגמת זפת בתוו משפך אטום, והניח לו להתקבע במשך שלוש שנים. בשנת 1930 שבר את האטם בתחתית המשפך, והזפת התחילה לזרום. מאז, נכון לשנת 2014, נפלו 9 טיפות, בממוצע אחת כל 9 שנים. הטיפה השמינית נפלה בנובמבר 2000 והטיפה התשיעית נשברה בזמן טיפול במתקן ב-24 באפריל 2014. עורכי הניסוי חישבו ומצאו כי צמיגותה של הזפת בניסוי גדולה פי 100 מיליארד מצמיגות המים.

הניסוי מתועד בספר השיאים של גינס כניסוי המעבדה הפעיל הוותיק ביותר בעולם, ונראה שיש במשפך מספיק זפת כדי שהניסוי יימשך עוד מאה שנים לפחות.

הניסוי לא בוצע במקור בתנאים אטמוספיריים מבוקרים, ולכן הצמיגות הייתה יכולה להשתנות לאורך השנה, עם שינויי הטמפרטורה. זמן מסוים לאחר נפילת הטיפה השביעית ב-1988, הותקן מיזוג אוויר בחדר בו נערך הניסוי. יציבות הטמפרטורה האריכה את זמן הנפילה של הטיפות הבאות.

6.4. משוואת Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v}=\frac{-\vec{\nabla}p}{\rho}+\vec{f}+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{V}$$

נשתעשע במשחק היחידות ונמצא את היחידות של הצמיגות.

ניקח שני איברים ממשוואת Navier-Stokes ולכל גודל ידוע נציב את היחידות שלו ובכך נחשוף את יחידות מקדם הצמיגות.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\propto\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{V}\longrightarrow\frac{\partial}{\partial t}\propto\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\longrightarrow\frac{1}{t}\propto\frac{\eta}{\rho}\frac{1}{x^2}\xrightarrow{\rho=\frac{M}{V}=\frac{kg}{m^3}}\frac{1}{\sec}\propto\frac{\eta}{\frac{kg}{m^3}}\frac{1}{m^2}\longrightarrow\boxed{\eta\propto\frac{kg}{m\bullet\sec}}$$

כמו משוואת איילר שהכרנו בפרק 5, משוואות Navier-Stokes הן בעלות חשיבות גדולה מכיוון שהן שימושיות ונפוצות בתחומים רבים, כגון מידול מזג האוויר וזרמים בים, זרימה בצנרת, וזרימה מסביב כנף של מטוס. ישנו עניין במשוואות מבחינה מתמטית, שכן טרם הוכח שקיים תמיד פתרון למשוואות בשלושה ממדים, וכן לא הוכח שבאופן כללי פתרונות המשוואה אינם סובלים מסינגולריות או אי רציפויות. בעיות אלו הוכרזו על ידי מכון קליי למתמטיקה כאחת משבע הבעיות הפתוחות החשובות ביותר במתמטיקה, ואף הוצע פרס כספי בשווי של 1,000,000 דולרים לחוקר שיצליח להוכיח או להפריך את הטענה הזו.

משוואות נאוויה-סטוקס הן משוואות דיפרנציאליות. הנחת היסוד של המשוואות היא שהזורם הוא רציף, והן פותחו מתוך עקרונות בסיסיים של שימור מסה, שימור תנע ושימור אנרגיה. פתרון המשוואות הוא שדה מהירות שהוא תיאור של מהירות הזורם בכל נקודה במרחב ובזמן. מתוך שדה המהירות ניתן לחשב גדלים פיזיקליים אחרים.

6.5. דוגמאות

1. הסבירו בקצרה ותארו על ידי משוואות וקשרים מתמטיים מתאימים את כל אחת מהתכונות הבאות:

   א. נוזל אידיאלי

   ב. נוזל בלתי דחיס

   ג. זרימה פוטנציאלית

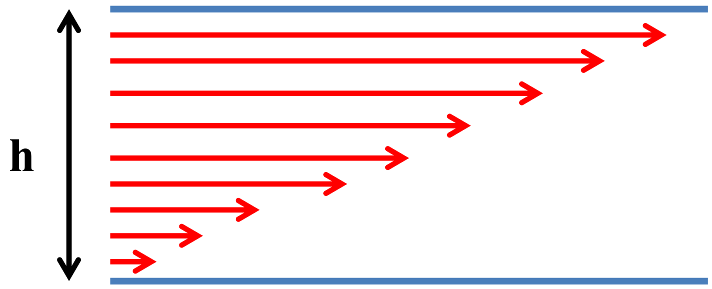
2. כתבו את משוואת Navier Stokes. יש להסביר כיצד משפיעה הצמיגות על הזורם.

3. בין שני משטחים, הנמצאים במרחק h אחד מהשני, נמצא נוזל צמיג ובלתי דחיס עם צמיגות η. המשטח העליון נע במהירות V_h הגדולה ממהירות המשטח התחתון אשר גודלה V_0.

   א. מהו פרופיל הזרימה של הנוזל במצב יציב?

   ב. מהי פונקציית הלחץ בנוזל?

   ג. חשבו את המהירות הממוצעת (לפי הגדרת הממוצע של פונקציה).



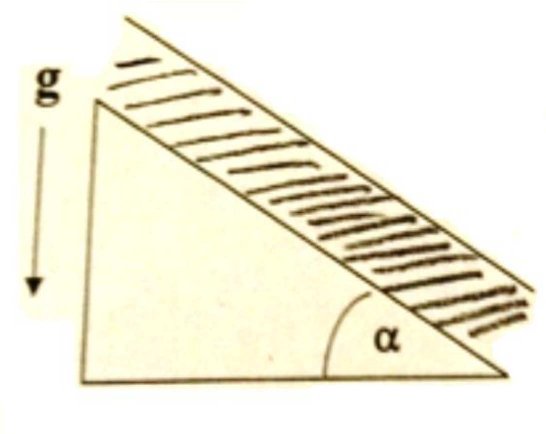
4. נתונים שני משטחים המקבילים זה לזה וקבועים במקומם. בין שני המשטחים קיים גרדיאנט לחצים. כתוצאה מהפרש הלחצים מתקיימת זרימה יציבה בין שני המשטחים. לא קיים שדה כבידה.

   א. נתחו את הבעיה מבחינה פיסיקלית (תלות וכיוון) עבור הגדלים הרלוונטיים המופיעים במשוואת Navier-Stokes.

ב. יש למצוא איך מתנהג הלחץ במרחב בין המשטחים.
ג. מהו פרופיל המהירות של הנוזל?

5. נוזל צמיג ובלתי דחיס נמצא בקופסא גלילית ארוכה מאוד. הקופסא נמצאת בשדה הכבידה של כדור הארץ. יש למצוא את פרופיל המהירות ואת פונקציית הלחץ לאחר שהנוזל הגיע למצב עמיד (Steady Flow).

6. נוזל צמיג ובלתי דחיס שעליו פועל כח הכובד, נמצא בין שני מישורים המוטים בזווית α כפי שמתואר בציור. מצא/י את הלחץ ואת פרופיל המהירות של הנוזל הצמיג במצב עמיד.
(שאלה מספר 2 מבחן 2012 מועד א')



7. נתונים שני גלילים עם רדיוסים שונים. מכניסים את הגליל האחד לשני כך שציר הסימטריה של שניהם משותף. בין שני גלילים אלו נמצא נוזל צמיג ובלתי דחיס. כל גליל מסתובב במהירות זוויתית שונה.
יש למצוא את פונקציית הלחץ בנוזל ואת פרופיל המהירות.

8. נוזל צמיג ובלתי דחיס נמצא בין שני צינורות גליליים בעלי ציר מרכזי משותף, כך שהרדיוסים שלהם הם R_1, R_2. על הנוזל מופעל הפרש לחצים לאורך ציר הצינור כך שגרדיאנט הלחץ הוא קבוע. יש למצוא את פרופיל המהירות של הנוזל הזורם בין שני הצינורות.
הדרכה: היעזרו באופרטור לפלס בקואורדינטות גליליות:

$$\Delta\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

כדי לקיים את תנאי השפה, כדאי להיעזר ב- $\Delta\left(a\ln(r)+b\right)=0$
(שאלה מספר 2 מבחן 2012 מועד א')

9. גליל עם רדיוס R_1 נמצא בתוך גליל עם רדיוס R_2. לשני הגלילים ציר סימטריה משותף. הגליל הפנימי נע במהירות u בכיוון ציר הסימטריה. בין

שני הגלילים נמצא נוזל צמיג ובלתי דחיס. כיצד יתנהג הנוזל הנמצא בין שני הגלילים?

10. **<u>אוסצילציות בנוזל צמיג:</u>**

נוזל צמיג ובלתי דחיס חסום מלמעלה ומלמטה בין שני מכסים שטוחים. הבסיס התחתון נע בכיוון מסוים במחזוריות בזמן עם תדירות ω.

א. יש למצוא את פרופיל המהירות של הנוזל הנובע ישירות ממשוואת *Navier Stokes*

ב. מהו הכח הנגרם על ידי הנוזל הצמיג שמופעל על הקרקעית ($\left.F_x\right|_{z=0} = ?$)?
(יש להשתמש ב- stress tensor)

ג. מה היה קורה אילו זה היה נוזל אידיאלי?

ד. איך ישתנו תשובותיך אילו היה מדובר בנוזל עם עומק אינסופי?

6.6. פתרונות

1. סוגי זרימה וסוגי נוזלים:

א. נוזל אידיאלי – נוזל ללא חיכוך פנימי וכל שינוי בצורתו נעשה ללא הפסדי אנרגיה. נוזל אידיאלי נחשב כנוזל שלא ניתן לדחוס אותו ותמיד שומר על נפח קבוע.

ב. נוזל בלתי דחיס – נוזל אשר במצב סטטי אינו משנה כמעט את צפיפותו, גם בתנאי לחץ גבוהים, נחשב לנוזל בלתי דחיס. לעומת זאת, אם במצב סטטי הנוזל משנה את צפיפותו כתוצאה משינוי הלחץ זהו נוזל דחיס.

ג. זרימה פוטנציאלית – זרימה פוטנציאלית מתארת את שדה המהירות כגרדיאנט של פונקציה סקלארית המתארת את פוטנציאל המהירות. לפי הגדרה זאת, מתקבל שזרימה פוטנציאלית מתאפיינת בשדה מהירות אי רוטציוני (היות ורוטור של גרדיאנט מתאפס תמיד!).

2.

משוואת Navier – Stokes:

משוואה נו מתארת תנועה של זורם צמיג. המשוואה פותחה בשנת 1822 וקרויה על שם שני מפתחיה: המתמטיקאי הפיסיקאי והמהנדס הצרפתי קלוד לואי מרי נאוויה (Claude Louis Marie Navier) והמתמטיקאי והפיסיקאי הבריטי סר ג'ורג' גבריאל סטוקס (Sir George Stokes).

המשוואה הנראית כך:

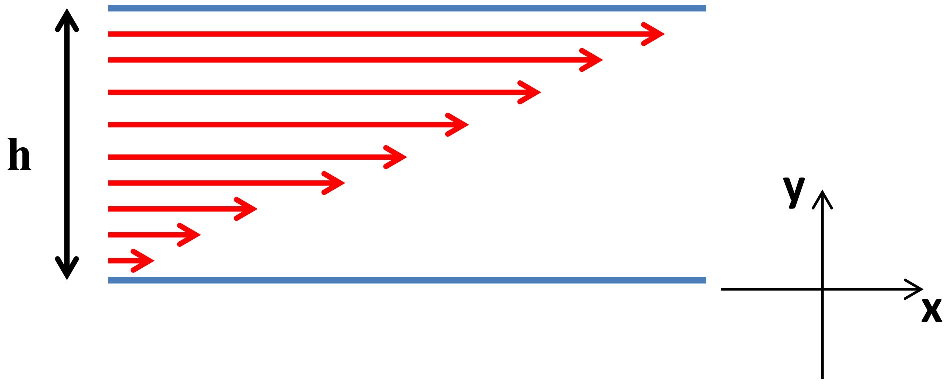
$$\boxed{\textit{Navier Stokes} \quad - \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{f} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{V}}$$

הסבר מפורט בקרוב...

3. נכתוב תחילה את תנאי השפה/תנאי ההתחלה של הבעיה. אחת התכונות העיקריות של נוזל צמיג בתנועה קובעת כי, הנוזל הצמיג נצמד למשטח ונע ביחד עם המשטח עצמו.

עוד ידוע מנתוני השאלה כי מהירות המשטח העליון גדולה ממהירות המשטח התחתון.

$V_0 < V_h$



בשילוב הפרשי המהירות ותכונת הצמיגות לעיל ניתן לקבוע כי הנוזל הצמיג הצמוד למשטח העליון, יקבל את מהירות המשטח העליון ואילו הנוזל הצמוד למשטח התחתון יקבל את מהירות המשטח התחתון.

$V(z=h)=V_h$

$V(z=0)=V_0$

רוב הבעיות שנפתור יהיו במצב שבו הנוזל בזרימה יציב. הווה אומר, אין שינוי במהירות הנוזל. על כן נגזרת המהירות תהיה אפס!

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}=0$$

לפני שנתחיל להיכנס בעובי הקורה של משוואות Navier-Stokes, ננסה להבין מבחינה פיסיקלית איך מתנהגים הלחץ והמהירות המתוארים במשוואה.

מהירות:

היות ומהירות הנוזל במשטח התחתון ובמשטח העליון מכוונים בכיוון x, פרופיל המהירות כולה יהיה בכיוון x. וקטור המהירות צריך להיות רציף (אין שום סיבה שבשתי נקודות סמוכות תהיה מקפצה כזו או אחרת במהירות).

מסיבה זאת נסיק כי מהירות הנוזל הולכת וקטנה ככל שרכיב ה-y שלה קטן.

$$\vec{V}=V(y)\hat{x}=V_x(y)$$

לחץ:

ככלל אצבע, ניתן לומר כי הלחץ מורגש בכיוון מאונך לכיוון המהירות. מהירות הנוזל תהיה בכיוון אופקי, על כן הלחץ מורגש בכיוון y. בין שתי נקודות אנכיות סמוכות, יש הפרש מהירויות. הפרש המהירויות מצביע על נוכחות לחץ באותו הכיוון. מכל זה, נאמר כי הלחץ יהיה תלוי אף ורק בקואורדינטה y.

$$P = P(y)$$

נפתח את האיברים של משוואת Navier-Stokes בזה אחר זה.

- האיבר הראשון של משוואת Navier-Stokes מתאפס עקב זרימה במצב יציב (כפי שהוסבר לעיל).

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

- המהירות תלויה בקואורדינטה y והיא בכיוון x. על כן, מתקיים:

$$\left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\vec{V} = \left[V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z}\right]\vec{V} = V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \xrightarrow[V_y = 0]{\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 0} \left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\vec{V} = 0$$

- האיבר הבא שנטפל בו הוא גרדיאנט הלחץ. עמדנו על כך שהלחץ תלוי בקואורדינטה y ועל כן גרדיאנט הלחצים יהיה בכיוון y.

$$\vec{\nabla}P = \frac{\partial}{\partial y}\hat{y}$$

- לפלסיאן בקואורדינטות קרטזיות הוא נגזרת שנייה של כל רכיב. היות והמהירות של הנוזל תלויה אך ורק ב-y, הלפלסיאן יניב לנו אך ורק איבר אחד – הנגזרת השנייה של המהירות לפי x.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\hat{x}$$

נציב את הרכיבים במשוואת Navier-Stokes:

$$\boxed{Navier\ Stokes\ \ -\ \ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \frac{-\vec{\nabla}\text{p}}{\rho} + \vec{f} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{V}}$$

נפרק את המשוואה הוקטורית לשתי משוואות – כל אחת בכיוון שונה.
נתחיל בכיוון x :

$$\hat{x}:\ 0+0=0+0+\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0\xrightarrow{double\ integration}V(y)=A_1 y+A_2$$

$$\begin{bmatrix} V(y=0)=V_0\longrightarrow A_2=V_0 \\ V(y=h)=V_h\longrightarrow A_1 h+V_0=V_h\longrightarrow A_1=\dfrac{V_h-V_0}{h}\end{bmatrix}\longrightarrow\boxed{\vec{V}(y)=\left(\frac{V_h-V_0}{h}y+V_0\right)\hat{x}}$$

אם כך, מצאנו את פרופיל המהירות. נדמה כי פרופיל המהירות מתנהג כ<u>קו ישר</u>.
ככל שנעמיק יותר (נתקרב למשטח התחתון), כך תקטן מהירות הנוזל עד כדי 0.

נמשיך בכיוון y :

$$\hat{y}:0+0=-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{1}{\rho}-g+0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\rho g\xrightarrow{\int_{y_0}^{y}dy}P(y)=\rho g\left(y-y_0\right)\xrightarrow{y_0=0}\boxed{P(y)=\rho g y}$$

מצאנו את פונקציית הלחצים שבנוזל. ככל שמהירות הנוזל קטנה יותר, כך הלחץ בגובה זה יהיה חזק יותר. ככל שמהירות הנוזל תגדל כך יקטן הלחץ המורגש.
כדי לחשב את המהירות הממוצעת, נזכר בהגדרת ה**<u>ממוצע של פונקציה</u>**.

$$\boxed{\left\langle\vec{V}\right\rangle=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

לפי נתוני השאלה שלנו :

$$a=0\ ,\ b=h\ ,\ f(y)=\vec{V}(y)=\left(\frac{V_h-V_0}{h}y+V_0\right)\hat{x}$$

אם כן, נמצא את **<u>המהירות הממוצעת</u>**.

$$\left\langle\vec{V}\right\rangle=\frac{1}{h}\int_0^h\left(\frac{V_h-V_0}{h}y+V_0\right)dy=\frac{1}{h}\left(\frac{V_h-V_0}{2h}h^2+V_0h\right)=\frac{V_h-V_0}{2}+V_0\longrightarrow\boxed{\left\langle\vec{V}\right\rangle=\frac{V_h+V_0}{2}}$$

הדבר מאוד הגיוני חרף תכונת הלינאריות של פונקציית המהירות.
<u>הערה:</u>
ניתן להתייחס לשאלה זאת כבעיה דו ממדית כפי שפתרנו. אך ניתן לפתור שאלה זאת כבעיה תלת ממדית כאשר הממד השלישי הוא z המתאר את רוחב התיבה, אך תוספת זו לא משנה כלל את תוצאות הבעיה.

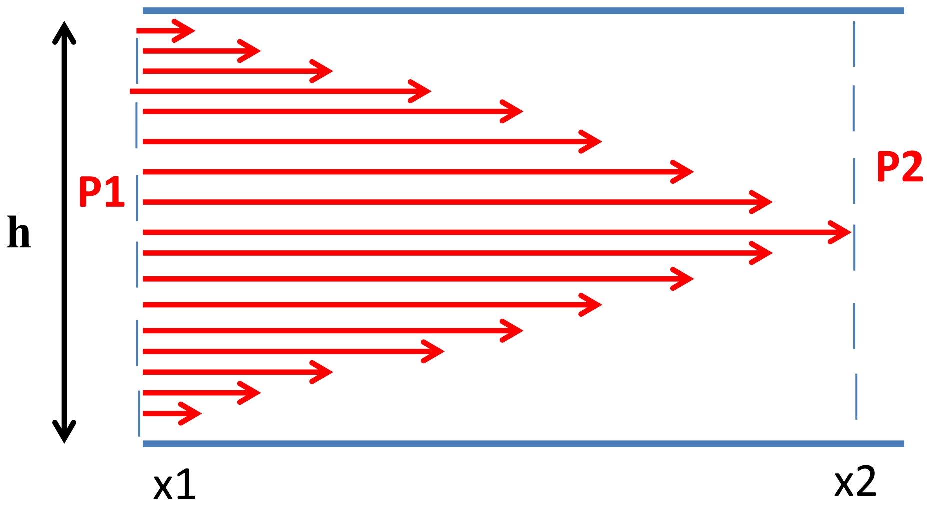
4. **<u>גרדיאנט לחצים בצינור:</u>**

ננתח את הבעיה מבחינה פיסיקלית. כאשר יש הפרש לחצים בין שתי נקודות, הזורם ירצה לנוע מלחץ גבוה ללחץ נמוך. היות ונתון גרדיאנט לחצים (קבוע) בין הנקודות x1 ו-x2, ניתן להבין כי הנוזל ירצה לזרום לכיוון הנקודה x2. על כן **מהירות** הנוזל תהיה לכיוון x והיא תהיה תלויה בקואורדינטה y.

$$\vec{V}=V\left(y\right)\hat{x}=V_x\left(y\right)$$

לגבי ה**לחץ** התלות ברורה! הלחץ בנקודה x1 גדול מהלחץ בנקודה x2, על כן הלחץ תלוי בקואורדינטה x.

$$P=P\left(x\right)$$



נפתח את האיברים של משוואת Navier-Stokes בזה אחר זה.

- האיבר הראשון של משוואת Navier-Stokes מתאפס עקב זרימה במצב יציב (כפי שהוסבר לעיל).

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=0$$

- המהירות תלויה בקואורדינטה y והיא בכיוון x. על כן, מתקיים:

$$\left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\vec{V}=\left[V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+V_z\frac{\partial}{\partial z}\right]\vec{V}=V_x\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+V_y\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+V_z\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\xrightarrow[V_y=0]{\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}=0}\left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\vec{V}=0$$

- האיבר הבא שנטפל בו הוא גרדיאנט הלחץ. עמדנו על כך שהלחץ תלוי בקואורדינטה x ועל כן גרדיאנט הלחצים יהיה בכיוון x.

$$\vec{\nabla}P=\frac{\partial P}{\partial x}\hat{x}+\cancel{\frac{\partial P}{\partial y}\hat{y}}=\frac{\partial P}{\partial x}\hat{x}$$

- לפלסיאן בקואורדינטות קרטזיות הוא נגזרת שנייה של כל רכיב. היות והמהירות של הנוזל תלויה אך ורק ב-y, הלפלסיאן יניב לנו אך ורק איבר אחד – הנגזרת השנייה של המהירות לפי y והתוצאה תהיה בכיוון x.

$$\Delta\vec{V}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vec{V}=\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\hat{x}$$

נציב את הרכיבים במשוואת Navier-Stokes:

$$\boxed{Navier\ Stokes\quad -\quad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v}=\frac{-\vec{\nabla}\mathrm{p}}{\rho}+\vec{f}+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{V}}$$

נכתוב את רכיבי המשוואה בכיוון y:

$$\hat{y}:\quad 0+0=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\xrightarrow[\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}=0]{\frac{\partial P}{\partial y}=0}nothing$$

נכתוב את רכיבי המשוואה בכיוון x:

$$\hat{x}:\quad 0+0=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

נסתכל על האיבר הראשון במשוואה. נתון שקיים גרדיאנט הלחצים קבוע.

הווה אומר, שהנגזרת של הלחץ לפי הקואורדינטה x היא קבועה!

אינטגרל פשוט נותן לנו את פונקציית הלחץ.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=A_1\xrightarrow{\int dx}P\left(x\right)=A_1x+A_2$$

כעת, על פי נתונים התחלתיים בנקודות הקצה, נמצא את הקבועים.

$$\begin{bmatrix}P\left(x_1\right)=A_1x_1+A_2=P_1\\P\left(x_2\right)=A_1x_2+A_2=P_2\end{bmatrix}\xrightarrow{P(x_2)-P(x_1)}A_1\left(x_2-x_1\right)=P_2-P_1\longrightarrow\boxed{A_1=\frac{P_2-P_1}{x_2-x_1}}$$

$$A_1x_1+A_2=P_1\longrightarrow\frac{P_2-P_1}{x_2-x_1}x_1+A_2=P_1\longrightarrow\boxed{A_2=\frac{P_2x_1-P_1x_2}{x_2-x_1}}$$

לבסוף, קבלנו את פונקציית הלחץ.

$$\boxed{P(x)=\frac{P_2-P_1}{x_2-x_1}x+\frac{P_2x_1-P_1x_2}{x_2-x_1}}$$

ניתן לראות כי היא לינארית ב-x וקיים הפרש לחצים P2-P1.

נחזור למשוואת Navier-Stokes ונציב בה את גרדיאנט הלחץ.

$$0=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\xrightarrow{\frac{\partial P}{\partial x}=A_1}\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}=A_1$$

גם כאן, האינטגרל פשוט ומידי. אינטגרציה פעמיים לפי הקואורדינטה y תביא לנו את פרופיל המהירות (עד כדי 2 קבועים שאותם נמצא לפי תנאי השפה).

אינטגרציה פעמיים על קבוע תיתן לנו פרבולה!

$$V_x(y)=\frac{1}{\eta}\left(A_1\frac{y^2}{2}+A_3y+A_4\right)$$

מתכונת הצמיגות של הזורם ניתן להסיק כי מהירות הזורם בסמוך למשטח שווה למהירות המשטח. היות והמשטחים (העליון והתחתון) הם במצב נייח, מהירות הנוזל בגובה אפס ובגובה h תהיה אפס! על כן:

$$V_x(y=0)=0\longrightarrow A_4=0$$

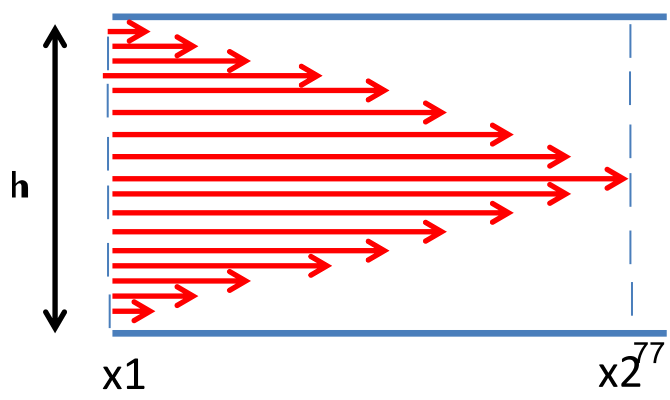
$$V_x(y=h)=0\xrightarrow{A_4=0}\frac{1}{\eta}\left(A_1\frac{h^2}{2}+A_3h\right)=0\longrightarrow A_3=-\frac{A_1h}{2}$$

נציב בחזרה את הקבועים בפונקציית המהירות.

$$V_x(y)=\frac{A_1}{2\eta}\left(y^2-hy\right)\longrightarrow\boxed{V_x(y)=\frac{P_2-P_1}{2\eta(x_2-x_1)}\left(y^2-hy\right)}$$

__ניתוח התוצאה:__

עכשיו ניתן להבין מדוע פרופיל מהירות הזורם מתואר בצורה של פרבולה. ציר הסימטריה של הפרבולה הוא h/2. מבחינה

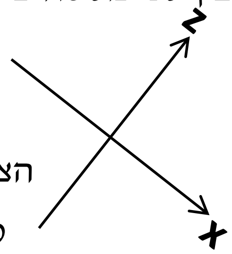


אינטואיטיבית: כפי שאמרנו קודם לכן, מהירות הנוזל בקצוות מתאפסת. מה שאומר לנו שוודאי יש נקודה הנמצאת בגובה בין 0 ל-h, כך שהמהירות שם מקסימלית! היות ואין שום העדפה או סיבה כלשהי שהבעיה תהיה אי סימטרית, נאמר שהמהירות המקסימלית מתקבלת בדיוק במרכז הפרבולה!

5. פתרון בקרוב...

6. **<u>נוזל במדרון:</u>**

נוזל צמיג ובלתי דחיס זורם בין שני משטחים כתוצאה משדה הכבידה g.



היות ובבעיה מסוג זה למהירות הזורם יש רכיב אופקי ואנכי, נבחר מערכת צירים אחרת על מנת להקל על הפתרון. מערכת הצירים היא מערכת הצירים הרגילה אשר מסובבת בזווית α עם כיוון השעון. כך נוכל לומר כי **מהירות** הנוזל תהיה בכיוון x ותהיה תלויה בקואורדינטה z. **הלחץ** בנוזל יהיה תלוי רק בקואורדינטה z.

$$\vec{V} = V_x(z)$$
$$P = P(z)$$

נכתוב בצורה מפורשת את משוואת Navier-Stokes.

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial t} + \left[V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_z \frac{\partial}{\partial z}\right]\left[V_x \hat{x} + V_z \hat{z}\right] = \frac{-1}{\rho}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{z}\right] + \frac{\eta}{\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\left[V_x \hat{x} + V_z \hat{z}\right] + \vec{g}$$

עקב זרימה עמידה, יתאפסו שני האיברים עם הנגזרת לפי הזמן.

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$$

נשאיר במשוואה את האיברים שלא מתאפסים ונפרק את התאוצה – g לרכיביה.

$$0 + 0 + 0 = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\hat{z} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\hat{x} + g\sin\alpha\,\hat{x} - g\cos\alpha\,\hat{z}$$

נפרק את המשוואה לכיוון x וכיוון z.

נתחיל עם הכיוון האנכי של תנועת הזורם.

<u>כיוון z :</u>

$$\hat{z}: \quad 0=\frac{-1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}-g\cos\alpha \xrightarrow{\int dz} \boxed{P=\rho g z\cos\alpha}$$

דבר זה מזכיר לנו את חוק פסקל. במקרה זה, במקום z יש לנו את ההיטל שלו.

<u>כיוון x :</u>

$$\hat{x}: \quad 0=\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}+g\sin\alpha$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}=-\frac{\rho g}{\eta}\sin\alpha \xrightarrow{double\ integration} V_x\left(z\right)=-\frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}z^2+A_1 z+A_2$$

נשתמש באחד מתנאי השפה – מהירות הנוזל מתאפסת בגובה אפס – ונמצא את אחד הקבועים.

$$V_x\left(z=0\right)=0 \longrightarrow A_2=0 \longrightarrow V_x\left(z\right)=-\frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}z^2+A_1 z$$

מהירות הנוזל בכיוון z, בצמוד למשטח העליון היא מהירות קבועה. על כן, גרדיאנט המהירות לכיוון z מתאפס.

נמצא את גרדיאנט המהירות לכיוון z.

$$\frac{\partial V_x}{\partial z}=-\frac{\rho g\sin\alpha}{\eta}z+A_1$$

נדרוש כי יתאפס בגובה h מעל המשטח התחתון.

בכך נמצא את הקבוע השני.

$$\frac{\partial V_x\left(z=h\right)}{\partial z}=0 \longrightarrow -\frac{\rho g\sin\alpha}{\eta}h+A_1=0 \longrightarrow A_1=\frac{\rho g h\sin\alpha}{\eta}$$

פרופיל המהירות של הנוזל הוא :

$$\boxed{V_x\left(z\right)=-\frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}z^2+\frac{\rho g h\sin\alpha}{\eta}z}$$

7. בבעיה זו יש סימטריה גלילית ולכן נעבוד בקואורדינטות גליליות: גובה, רדיאלית ואזימוטאלית (זוויתית). לפני הניסוח המתמטי, ננסה להבין איך מתנהגת הזרימה של הנוזל בין שני הגלילים ובמה הלחץ תלוי.
עקב סיבוב הגליל החיצוני במהירות זוויתית כלשהי, ייצמד הנוזל הצמיג לגליל ויקבל את מהירותו. אותו הדבר עבור הגליל הפנימי – הנוזל הצמוד לגליל יקבל את מהירותו. על כן, יהיה לנו הפרשי מהירויות בין רדיוסי הגליל.

<u>מהירות:</u>

במצב עמיד, המהירות תהיה תלויה ב-r בלבד(!) והיא תקבל את כיוון הסיבוב של הגלילים במידה והם מסתובבים לאותו כיוון.
במקרה והגלילים יסתובבו בכיוון מנוגד, כיוון הסיבוב של הנוזל יקבע על פי גודל המהירות הזוויתית של כל גליל.

$$\vec{V} = V_r \hat{r} + V_\varphi \hat{\varphi} + V_z \hat{z}$$
$$V_r = V_z = 0$$
$$\vec{V} = V_\varphi \hat{\varphi} = V_\varphi(r)\hat{\varphi}$$

<u>לחץ:</u>

נעזר ברעיון שהעלנו קודם ונאמר כי הלחץ יהיה תלוי בקואורדינטה שמאונכת כביכול לכיוון המהירות. היות וקבענו את כיוון המהירות בכיוון הזוויתי אזי, הלחץ יהיה תלוי ב-r.

$$\mathrm{P}(\mathrm{r},\varphi,z) = \mathrm{P}(\mathrm{r})$$

כפי שנאמר, משוואת Navier – Stokes היא משוואה וקטורית אשר מתפרקת לשלוש משוואות דיפרנציאליות – כל אחת בכיוון קואורדינטה אחרת.

היות ומדובר בקואורדינטות גליליות, האופרטורים שהשתמשנו עד כה, יראו אחרת בהתאם.

נכתוב כעת את שלוש המשוואות המפורקות.

<u>בכיוון הרדיאלי:</u>

$$\hat{r}: \ \frac{\partial V_r}{\partial t}+\left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)V_r-\frac{V_\varphi{}^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\eta}{\rho}\left[\Delta V_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}-\frac{V_r}{r^2}\right]$$

ישנם איברים רבים שמתאפסים בגלל מאפייני הבעיה שצוינו לעיל.

$$\boxed{-\frac{V_\varphi{}^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}}$$

קבלנו משוואה דיפרנציאלית ראשונה המקשרת בין הלחץ והמהירות.

<u>כיוון אזימוטאלי:</u>

$$\hat{\varphi}: \ \frac{\partial V_\varphi}{\partial t}+\left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)V_\varphi+\frac{V_rV_\varphi}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \varphi}+\frac{\eta}{\rho}\left[\Delta V_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}-\frac{V_\varphi}{r^2}\right]$$

גם כאן, מספר רב של איברים מתאפסים.

$$\boxed{0=\frac{\eta}{\rho}\left[\Delta V_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}-\frac{V_\varphi}{r^2}\right]}$$

<u>כיוון אנכי:</u>

$$\hat{z}: \ \frac{\partial V_z}{\partial t}+\left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)V_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\eta}{\rho}\Delta V_z$$

במשוואה זו, כל האיברים מתאפסים!

$$\boxed{0=0}$$

מהכיוון האנכי לא נשיג שום מידע לגבי הבעיה.

אם כן, קבלנו שתי משוואות דיפרנציאליות שאותן ניתן לפתור ללא כל קושי. את המשוואה הראשונה לא ניתן לפתור ללא פונקציית המהירות. לכן, ראשית, נפתור את המשוואה השנייה.

$$\frac{\eta}{\rho}\left[\Delta V_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}-\frac{V_\varphi}{r^2}\right]=0\longrightarrow\frac{\partial^2V_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}-\frac{V_\varphi}{r^2}=0$$

ניתן לזהות מיד כי זאת משוואה שוות מימד שבה נתקלנו קודם לכן.

למשוואה מימד של -2 ב-r.

$$\frac{\partial^2V_\varphi}{\partial\varphi^2}\sim\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\sim\frac{V_\varphi}{r^2}\sim\frac{1}{r^2}$$

ראינו כי במשוואה מסוג זה ננחש פתרון מהסוג:

$$V_\varphi=Ar^\alpha$$

נציב את ניחוש הפתרון ומשם נמצא את פונקציית המהירות.

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+\alpha r^{\alpha-2}-r^{\alpha-2}=0$$

$$r^{\alpha-2}\left(\alpha^2-\alpha+\alpha-1\right)=0\longrightarrow\alpha^2=1\longrightarrow\alpha=\pm1$$

$$\boxed{V_\varphi=A_1r+A_2\cdot\frac{1}{r}}$$

במקרה זה, לעומת חלק מהדוגמאות הקודמות, אף אחד מהקבועים של הפתרון אינו מתאפס מסיבה כזו, שאין לנו תנאי באפס או באינסוף, אלא בנקודות סופיות כלשהן.
המהירות אותה מקבל הנוזל בצמוד לגליל הפנימי (או החיצוני) היא המהירות הקווית של הגליל עצמו.

$$V_\varphi(r=R_1)=R_1\Omega_1\longrightarrow A_1R_1+A_2\cdot\frac{1}{R_1}=R_1\Omega_1\xrightarrow{:R_1}(*)\,A_1+A_2\cdot\frac{1}{R_1^{\,2}}=\Omega_1$$

$$V_\varphi(r=R_2)=R_2\Omega_2\longrightarrow A_1R_2+A_2\cdot\frac{1}{R_2}=R_2\Omega_2\xrightarrow{:R_2}(**)\,A_1+A_2\cdot\frac{1}{R_2^{\,2}}=\Omega_2$$

$$(*)-(**)\longrightarrow A_2\left(\frac{1}{R_1^{\,2}}-\frac{1}{R_2^{\,2}}\right)=\Omega_1-\Omega_2\longrightarrow\boxed{A_2=\frac{R_1^{\,2}R_2^{\,2}\left(\Omega_1-\Omega_2\right)}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}}$$

$$(*)\longrightarrow A_1=\Omega_1-\frac{\cancel{R_1^{\,2}}R_2^{\,2}\left(\Omega_1-\Omega_2\right)}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}\cdot\frac{1}{\cancel{R_1^{2}}}=\frac{\Omega_1\left(\cancel{R_2^{\,2}}-R_1^{\,2}\right)-R_2^{\,2}\left(\cancel{\Omega_1}-\Omega_2\right)}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}$$

$$\boxed{A_1=\frac{\Omega_2R_2^{\,2}-\Omega_1R_1^{\,2}}{R_2^{\,2}-R_1^{\,2}}}$$

נכתוב מחדש את פונקציית המהירות:

$$\boxed{V_\varphi=\left[\frac{\Omega_2R_2^{\;2}-\Omega_1R_1^{\;2}}{R_2^{\;2}-R_1^{\;2}}r+\frac{R_1^{\;2}R_2^{\;2}\left(\Omega_1-\Omega_2\right)}{R_2^{\;2}-R_1^{\;2}}\cdot\frac{1}{r}\right]\hat{\varphi}}$$

נבדוק את התוצאה שקיבלנו בעזרת מקרה קיצון של המהירות הזוויתית של הגלילים. נבדוק מה קורה כאשר לשני הגלילים מהירות זוויתית זהה.

$$\Omega=\Omega_1=\Omega_2\longrightarrow V_\varphi=\left[\frac{\Omega R_2^{\;2}-\Omega R_1^{\;2}}{R_2^{\;2}-R_1^{\;2}}r+\frac{R_1^{\;2}R_2^{\;2}\left(\Omega-\Omega\right)}{R_2^{\;2}-R_1^{\;2}}\cdot\frac{1}{r}\right]\hat{\varphi}\longrightarrow V_\varphi=\Omega r\,\hat{\varphi}$$

תשובה זאת מאוד הגיונית. כאשר המהירויות הזוויתיות שוות, ניתן להקביל בעיה זו לבעיה פשוטה של תנועה מעגלית עם מהירות זוויתית קבועה או תנועה של נוזל המסתובב בתנועה מעגלית סביב ציר כלשהו. בנוסף, ניתן לדמות תנועה זו לתנועה סיבובית של מוצק.

נחזור למשוואה השנייה:

$$\boxed{-\frac{V_\varphi^{\;2}}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}}$$

נציב את פונקציית המהירות שמצאנו במשוואה הדיפרנציאלית ונפתור אותה.

$$-\frac{V_\varphi^{\;2}}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\xrightarrow{\int dr}\mathrm{P}(\mathrm{r})=\int\frac{\rho}{r}\left(A_1r+\frac{A_2}{r}\right)^2dr$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{r})=\int\frac{\rho}{r}\left(A_1^{\;2}r^2+\frac{A_2^{\;2}}{r^2}+2A_1A_2\right)dr\longrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{r})=\int\left(\rho A_1^{\;2}r+\frac{\rho A_2^{\;2}}{r^3}+\frac{2\rho A_1A_2}{r}\right)dr$$

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{r})=\rho\left(\frac{A_1^{\;2}r^2}{2}-\frac{\rho A_2^{\;2}}{2r^2}+2\rho A_1A_2\ln r\right)}$$

ניתן לראות כי הלחץ לא תלוי בצמיגות הנוזל. היות ואנו מדברים אך ורק על מצב עמיד, הלחץ לא יהיה תלוי בזמן ולא בצמיגות הנוזל, אלא אך ורק ב-r.

8. נמצא איך יתנהג הנוזל כתוצאה מהפרש הלחצים בכיוון ציר הסימטריה.
מפאת הפרש הלחצים, הנוזל ינוע מלחץ גבוה לכיוון לחץ נמוך יותר. היות ובבעיה קיימת סימטריה גלילית, נוכל להסיק כי מהירות הנוזל תהיה תלויה אך ורק ברכיב הרדיאלי (r) וכיוונה יהיה בכיוון ציר הסימטריה (z).

$$\vec{V} = V_z(r)$$

נתון גרדיאנט לחצים קבוע. לפי נתון זה, נכתוב איך הלחץ מתנהג.

$$\vec{\nabla}P(z) = const \xrightarrow[P(z=z_0)=P_2]{P(z=0)=P_1} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_2 - P_1}{z_0} \xrightarrow{\int_0^z dz} \mathrm{P}(z) = \frac{P_2 - P_1}{z_0} z + P_1$$

נפתח את רכיבי משוואת Navier-Stokes :

כמובן שהבעיה שלנו – כמו רוב הבעיות שאנו פותרים – מתעסקת במצב עמיד ועל כן הגדלים הפיסיקליים אינם תלויים בזמן.

המהירות תלויה ב-r ובכיוון z.

הלחץ תלוי ב-z ואין לנו כוחות (תאוצות) חיצוניים.

$$* \ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}: \ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

$$* \ \left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\vec{V}: \ \left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\vec{V} = V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$* \ \vec{\nabla}P: \ \vec{\nabla}P = \frac{\partial P}{\partial z}\hat{z} = \frac{P_2 - P_1}{z_0}\hat{z}$$

$$* \ \vec{f}: \ \vec{f} = 0$$

לאחר כתיבת הרכיבים, נכתוב את המשוואה בשלמותה.

$$0 = \frac{-1}{\rho}\frac{P_2 - P_1}{z_0}\hat{z} + \frac{\eta}{\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]V_z(r)$$

ניתן לראות כי ישנם במשוואה אך ורק איברים בכיוון z.

נפשו את המשוואה ונקבל:

$$r\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{P_2 - P_1}{\eta z_0} r$$

נבצע תעלול קטן - אשר נמצא בו שימושים רבים בהמשך הדרך - שיקל עלינו בתהליך פתרון המשוואה הדיפרנציאלית שקיבלנו.

נביט באיברים הנמצאים באגף שמאל של המשוואה. ניתן לזהות שסכום שני האיברים הוא בעצם נגזרת של מכפלה של שני איברים. על כן, נצמצם את הכתיבה שלהם בצורה הבאה:

$$r\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{\partial V_z}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)=\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)'$$

כעת ניתן לבצע אינטגרציה פשוטה על שני האגפים.

$$\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)'=\frac{P_2-P_1}{\eta z_0}r\xrightarrow{\int dr}r\frac{\partial V_z}{\partial r}=\frac{P_2-P_1}{2\eta z_0}r^2+A_1\xrightarrow{:r}\frac{\partial V_z}{\partial r}=\frac{P_2-P_1}{2\eta z_0}r+\frac{A_1}{r}$$
$$\xrightarrow{\int dr}V_z\left(r\right)=\frac{P_2-P_1}{4\eta z_0}r^2+A_1\ln r+A_2$$

9. פתרון בקרוב...

10. **<u>אוסצילציות בנוזל צמיג</u>**

א. נרשום תחילה את תנאי השפה של המהירות.

הבסיס התחתון נע עם תדירות ω. נאמר שהבסיס העליון נמצא במנוחה.

$$V\left(z=0\right)=V_0e^{-i\omega t}$$
$$V\left(z=h\right)=0$$

המכסה התחתון נע במחזוריות בכיוון x (ככה הגדרנו). וכך יהיה כיוון תנועתו של הנוזל בכל המרחב.

כמנהגנו, אנו מדברים על מצב בו המערכת לא מושפעת מתחילת התנועה – בשפה המקצועית נאמר, אחרי "אינסוף זמן" (אחרי זמן רב). ככל שנרחיק מהקרקעית, כך הנוזל ירגיש במידה מופחתת את תנועתו המחזורית של הבסיס התחתון.

אם כן, המהירות תהיה תלויה בקואורדינטה z.

היות ותנועת הבסיס היא מחזורית בזמן גם מהירות הנוזל בכל המרחב תהיה תלויה ברכיב הזמן.

$$\vec{V}=V_x\left(z,t\right)\hat{x}$$

נוכל לתאר את התנועה כגל שהאמפליטודה שלו הולכת וקטנה עד הגיעה למהירות אפס במכסה העליון.

נכתוב את המשוואה המתארת תנועה של נוזל צמיג – משוואת Navier-Stokes $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v}=\frac{-\vec{\nabla}\mathrm{p}}{\rho}+\vec{f}+\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{V}$.

כל האיברים הקשורים למהירות הנוזל נמצאים במשוואה בכיוון x.

$$\hat{x}:\ \rho\left(\boxed{\frac{\partial V_x}{\partial t}}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\boxed{\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}}\right)$$

האיברים שמסגרת, אלו האיברים היחידים שלא מתאפסים.

על כן, ננחת למשוואה הדיפרנציאלית החלקית הבאה:

$$\boxed{\rho\frac{\partial V_x}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}}$$

משוואה זאת היא משוואת הדיפוזיה, או בשמה האחר - משוואת החום.

המשוואה מתארת את האופן שבו זורם חום בגוף מרחבי לאורך זמן.

בצורתה המלאה, המשוואה נכתבת בצורה הבאה:

$$\frac{\partial V\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}=k\nabla^2 V\left(\vec{r},t\right)$$

בתהליך הפתרון המשוואה בממד אחד (כפי שיש אצלנו), נשתמש בשיטת הפרדת משתנים.

$$V_x\left(z,t\right)=\mathrm{T}\left(t\right)\mathbb{Z}\left(z\right)$$

נציב את הביטוי במשוואה הדיפרנציאלית.

$$\rho\frac{\partial V_x}{\partial t}=\eta\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\xrightarrow{V_x(z,t)=\mathrm{T}(t)\mathbb{Z}(z)}\rho\mathbb{Z}\left(z\right)\frac{\partial \mathrm{T}\left(t\right)}{\partial t}=\eta\mathrm{T}\left(t\right)\frac{\partial^2\mathbb{Z}\left(z\right)}{\partial z^2}$$

נבצע הפרדת משתנים.

$$\rho\mathbb{Z}\left(z\right)\frac{\partial \mathrm{T}\left(t\right)}{\partial t}=\eta\mathrm{T}\left(t\right)\frac{\partial^2\mathbb{Z}\left(z\right)}{\partial z^2}\xrightarrow[:\mathrm{T}(t)]{:\rho\mathbb{Z}(z)}\frac{1}{\mathrm{T}\left(t\right)}\frac{\partial \mathrm{T}\left(t\right)}{\partial t}=\frac{\eta}{\rho}\frac{1}{\mathbb{Z}\left(z\right)}\frac{\partial^2\mathbb{Z}\left(z\right)}{\partial z^2}$$

שני הצדדים של המשוואה הם משוואות התלויות במשתנים שונים, לכן חייבים להיות שווים לקבוע מספרי. הקבוע יכול להיות חיובי ויכול להיות שלילי ואף יכול להיות מרוכב.

נשווה את האגף השמאלי ל-c ונפתור את המשוואה הדיפרנציאלית מסדר ראשון שהתקבלה.

$$\frac{1}{\mathrm{T}(t)}\frac{\partial \mathrm{T}(t)}{\partial t}=c\longrightarrow\frac{\partial \mathrm{T}(t)}{\partial t}=c\mathrm{T}(t)\longrightarrow\boxed{\mathrm{T}(t)=A_1e^{ct}}$$

נשווה את החלק השני לאותו הקבוע. הפעם נקבל משוואה דיפרנציאלית מסדר שני אותה אנחנו יודעים לפתור.

$$\frac{\eta}{\rho}\frac{1}{\mathbb{Z}(z)}\frac{\partial^2\mathbb{Z}(z)}{\partial z^2}=c\longrightarrow\frac{\eta}{c\rho}\frac{\partial^2\mathbb{Z}(z)}{\partial z^2}=\mathbb{Z}(z)\longrightarrow\boxed{\mathbb{Z}(z)=A_2e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}+A_3e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}}$$

נאחד את הפתרונות לפי הגדרת פונקציית המהירות.

$$V_x(z,t)=\mathrm{T}(t)\mathbb{Z}(z)\longrightarrow V_x(z,t)=A_1e^{ct}\left(A_2e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}+A_3e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}\right)$$

היות ומכפלת קבוע אחד בקבוע שני תיתן לנו קבוע אחר, אין צורך בקבוע הראשון.

$$\boxed{V_x(z,t)=e^{ct}\left(A_2e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}+A_3e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}\right)}$$

נשתמש בתנאי השפה של המהירות כדי לגלות את הקבועים של הפתרון. מהתנאי על הבסיס התחתון:

$$V(z=0)=V_0e^{-i\omega t}\longrightarrow e^{ct}\left(A_2e^0+A_3e^0\right)=V_0e^{-i\omega t}\longrightarrow\left(A_2+A_3\right)e^{ct}=V_0e^{-i\omega t}$$

נשווה את מעריך האקספוננט מכל צד של המשוואה ונשווה את האמפליטודה באותה הצורה.

$*\quad \boxed{c=-i\omega}$

$**\; A_2+A_3=V_0$

מהתנאי על הבסיס העליון נמצא את הקשר בין שני הקבועים של הפתרון :

$$V\left(z=h\right)=0\longrightarrow \cancel{e^{ct}}\left(A_2e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}h}+A_3e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}h}\right)=0\longrightarrow A_3e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}h}=-A_2e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}h}$$

$$***\boxed{A_3=-A_2e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}$$

נציב את *** ב- ** ונגלה את הביטוי של כל קבוע.

$$A_2+A_3=V_0\xrightarrow{A_3=-A_2e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}A_2-A_2e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}=V_0\longrightarrow A_2\left(1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}\right)=V_0$$

$$\boxed{A_2=\frac{V_0}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}}$$

כעת, משגילינו את הקבועים של הפתרון, נציב בחזרה בפונקציית המהירות נסדר אתה וזה יהיה הפתרון הסופי.

$$V_x\left(z,t\right)=e^{ct}\left(\frac{V_0}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}-\frac{V_0e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}\right)$$

$$V_x\left(z,t\right)=\frac{V_0e^{ct}}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}\left(e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}\right)$$

$$V_x\left(z,t\right)=\frac{V_0e^{ct}e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}\left(e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}e^{-h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}-e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}\right)$$

$$\boxed{V_x\left(z,t\right)=\frac{V_0e^{-i\omega t}e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}\left(e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}-e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}\right)}$$

לפני שהתחלנו לכתוב את פתרון התרגיל, צפינו כי תהיה דעיכה באמפליטודה של מהירות הנוזל וצפינו שתהיה מחזוריות בתנודות הנוזל הן מחזוריות בזמן והן מחזוריות מרחבית.
היכן רואים את המחזוריות המרחבית בפתרון הסופי?
החלק המרחבי של הפתרון נמצא בפנים הסוגריים. המעריך של האקספוננט נראה שמדעיך או מגביר את עוצמת המהירות.
אך אל לנו לשכוח כי מסתתר לו הקבוע c בתוך המעריך.

נעשה אתנחתא מרוכבת!

ניקח את הביטוי $\sqrt{\frac{1}{c}}$ ונתחיל לשחק איתו.

$$\sqrt{\frac{1}{c}}=\frac{1}{\sqrt{-i\omega}}=\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{1}{\sqrt{i}}=\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{1}{i}\frac{1}{\sqrt{i}}=\frac{-i}{\sqrt{\omega}}\frac{1}{\sqrt{i}}$$

נפתח את האיבר $\frac{1}{\sqrt{i}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{i}}=\frac{1}{\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}}}=\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

נציב חזרה:

$$\sqrt{\frac{1}{c}}=\frac{-i}{\sqrt{\omega}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\omega}}(-1-i)\longrightarrow\boxed{\sqrt{\frac{1}{c}}=\frac{-1}{\sqrt{2\omega}}(1+i)}$$

קבלנו אם כך כי הביטוי $\left(e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}-e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}\right)$ הנמצא בתוך פונקציית המהירות שמצאנו, לא משפיע רק על אמפליטודת המהירות, אלא גם מחזורי עם הקואורדינטה z.

ב. כעת, משמצאנו את פרופיל המהירות של הנוזל, נרצה למצוא את הכח הנובע מהצמיגות.
נגדיר את טנזור הלחצים (σ'_{ik}) ונכתוב את שני הגדלים החשובים לשם חישוב הכח הנדרש.

$$\sigma'_{ik}=\eta\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right)$$

$$F_i=\sum\Pi_{ik}n_k$$

נפתח את הכח מהגדרת הכח על ידי טנזור הלחצים.

$$F_i\big|_{z=0}=\sum\sigma_{xi}\hat{n}_x=\sigma_{xx}\hat{x}+\sigma_{xy}\hat{y}+\sigma_{xz}\hat{z}$$

$$F_i\big|_{z=0}=\left[\eta\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)\hat{x}+\eta\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\hat{y}+\eta\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{z}\right]_{z=0}$$

$$F_i\big|_{z=0}=\eta\frac{\partial V_x}{\partial z}\hat{z}\Big|_{z=0}$$

נשארנו עם איבר אחד בלבד!

מצאנו בסעיף א' את פונקציית המהירות, אז כל שנשאר לנו זה לגזור להציב z=0 ולפשט את הביטוי שנקבל.

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V_0e^{-i\omega t}e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}\left(e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}-e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}\right)\right]$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{V_0e^{-i\omega t}e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}-e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}\right)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{V_0e^{-i\omega t}e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}\left(e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}+e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}(z-h)}\right)$$

$$\left.\frac{\partial V_x}{\partial x}\right|_{z=0}=\frac{V_0e^{-i\omega t}e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}{1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}}\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}\left(e^{-h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}+e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}\right)$$

$$\left.\frac{\partial V_x}{\partial x}\right|_{z=0}=\frac{V_0e^{-i\omega t}\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}\left(e^{-h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}+e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}\right)}{e^{-h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}\left(1-e^{2h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}\right)}=\frac{V_0e^{-i\omega t}\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}\left(e^{-h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}+e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}\right)}{\left(e^{-h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}-e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}\right)}$$

$$\left.\frac{\partial V_x}{\partial x}\right|_{z=0}=\frac{V_0e^{-i\omega t}\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}\left(e^{-h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}+e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}\right)}{-\left(e^{h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}-e^{-h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}}\right)}$$

התהליך האחרון הוא לא לריק, מטרתו הייתה לפשט את הביטוי.
נעזר בהגדרת הפונקציות ההיפרבוליות.

$$\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}=\tanh(x)\longrightarrow\left.\frac{\partial V_x}{\partial x}\right|_{z=0}=-V_0e^{-i\omega t}\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}\tanh\left(h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}\right)$$

נכתוב את הכח שמופעל על הבסיס התחתון (z=0).

$$\boxed{\left.F_i\right|_{z=0}=\eta\left.\frac{\partial V_x}{\partial z}\hat{z}\right|_{z=0}=-\eta V_0e^{-i\omega t}\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}\tanh\left(h\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}\right)}$$

יש לזכור כי: $c=-i\omega$ וכדי לאמוד את הכח נצטרך לקחת את החלק הממשי של הפתרון שמסתתר אף בתוך ה-tanh.

ג. אילו היה הנוזל אידיאלי, לא היה זז הנוזל כתוצאה מתזוזת הקרקעית. אחד המאפיינים של נוזל אידיאלי הוא שאינו צמיג ועל כן לא יושפע מתזוזת הקירות החוסמים אותו.

ד. אילו היה הנוזל בעומק אינסופי היו משתנים תנאי השפה.
נגדיר את הקרקעית בגובה אפס ואת פני הנוזל בגובה אינסוף.
מהתנאי הראשון:

$$V(z=\infty)=0 \longrightarrow \lim_{z\to\infty} A_1 e^{ct}\left(A_2 e^{\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}+e^{-\sqrt{\frac{\eta}{c\rho}}z}\right)=0 \longrightarrow \boxed{A_2=0}$$

מהתנאי השני:

$$V(z=0)=V_0 e^{-i\omega t} \longrightarrow e^{ct}\left(A_2+A_3\right)=V_0 e^{-i\omega t}$$
$$A_2=0 \longrightarrow A_3 e^{ct}=V_0 e^{-i\omega t} \longrightarrow \boxed{A_3=V_0}, \boxed{c=-i\omega}$$

ועל כן (לאחר הצבת הקבועים) פונקציית המהירות תהיה:

$$\boxed{V_x(z,t)=V_0 e^{-i\omega t} e^{-\sqrt{\frac{\eta}{-i\omega\rho}}z}}$$

מכאן אפשר להמשיך בהתאם ולמצוא מהו הכח שמפעיל הנוזל על הקרקעית...